

الكبير في الرياضيات

الفرع الأدبي

الفصل الدراسي الثاني

تُعَدّ هذه الدوسية الجزء الثاني من الوحدة الرابعة وتحتوي على الدرس الرابع والخامس والسادس. وتشمل جميع أسئلة كتاب الطالب وكتاب التمارين، والكثير من التدريبات الخارجية.

الوحدة الرابعة: التكامل

المساحة

الدرس
الرابع

تكامل اقترانات خاصة

الدرس
الخامس

التكامل بالتعويض

الدرس
السادس



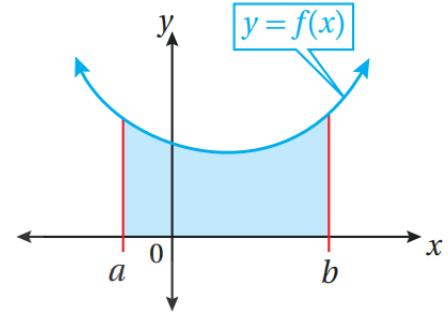
إعداد الأستاذ: محمد صلاح

0787412853

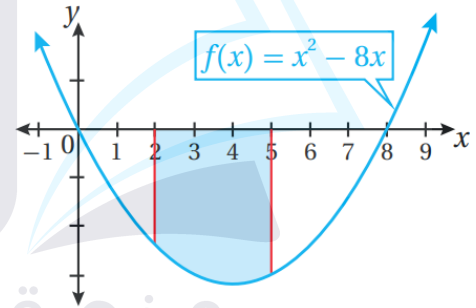
المساحة

تنقسم المساحة إلى ثلاث حالات ، هي:

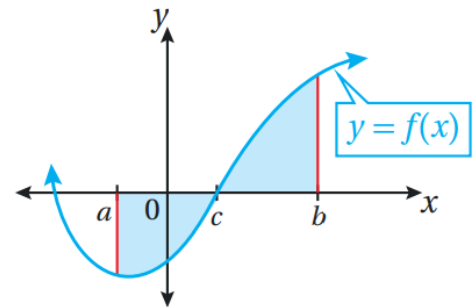
(1) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران و المحور x ، و تقع فوق هذا المحور.



(2) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران و المحور x ، و تقع أسفل هذا المحور.



(3) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران و المحور x ، و يقع أحد جزأها فوق المحور x و يقع الجزء الآخر أسفل هذا المحور.



خطوات إيجاد المساحة:

1. ساوي الاقتران المعطى بالصفر.
2. جد نقاط تقاطع الاقتران مع المحور x .
3. ارسم خط حدّد عليه نقاط التقاطع (ثم خذ قيمة محصورة بين نقاط التقاطع و عوض في الاقتران الأساسي).
4. المساحة:

$$A = \int_a^b \text{الاقتران} - \text{الاقتران السفلي} dx$$

ملاحظة:

كلمة المحور x في سؤال المساحة تعني:

$$f(x) = 0$$

أولاً: مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ و المحور x :

Ex: 1

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 3x$ و المحور x .

Ex: 2

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$$f(x) = x^2 + 5x + 4 \text{ والمحور } x.$$

Ex: 3

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$$f(x) = 9 - x^2 \text{ والمحور } x.$$



Ex: 4

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$$f(x) = (x + 1)(x - 4) \text{ و المحور } x.$$

Ex: 5

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$$f(x) = 3x^2 - 3 \text{ و المحور } x.$$



Ex: 6

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$$f(x) = x^2(2 - x) \text{ والمحور } x.$$

Ex: 7

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$$f(x) = x^3 - x \text{ والمحور } x.$$



Ex: 8

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$$f(x) = x^3 - 9x \text{ والمحور } x.$$

Ex: 9

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - 6x \text{ والمحور } x.$$



Ex: 11

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:
 $f(x) = x + 3$ والمحور x والمستقيمين:
 $x = 3$ ، $x = -1$

ثانيًا: مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى
 الاقتران $f(x)$ والمستقيمين والمحور x
 والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$.

Ex: 10

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:
 $f(x) = x^2 + 1$ والمحور x والمستقيمين:
 $x = 4$ ، $x = 1$



Ex: 12

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$$f(x) = x^2 - 8x \text{ والمحور } x \text{ والمستقيمين:}$$

$$x = 2, x = 5.$$

Ex: 13

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$$f(x) = x^2 - 4 \text{ والمحور } x \text{ والمستقيمين:}$$

$$x = 1, x = -1.$$



Ex: 14

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$$f(x) = 3x^2 - 12 \text{ و المحور } x \text{ والمستقيمين:}$$

$$x = 3, x = 1.$$

Ex: 15

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$$f(x) = x^2 + 2x \text{ و المحور } x \text{ والمستقيمين:}$$

$$x = -3, x = -1.$$



Ex: 17

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:
 $f(x) = x^3 + 4x$ والمحور x والمستقيمين:
 $x = 2$ ، $x = -1$

Ex: 16

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:
 $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$ والمحور x و
المستقيمين: $x = 2$ ، $x = 0$



Ex: 18

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$$f(x) = -7 + 2x - x^2 \text{ و المحور } x$$

المستقيمين: $x = 1$ ، $x = 4$.

Ex: 19

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$$f(x) = 5 - x \text{ و المحور } x \text{ والمستقيمين: } x = 3$$

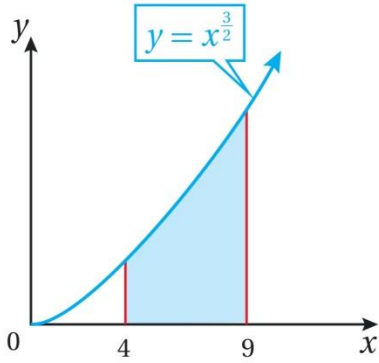
 $x = 5$.

واجب: كتاب الطالب

صفحة 67: التمرين 45



2

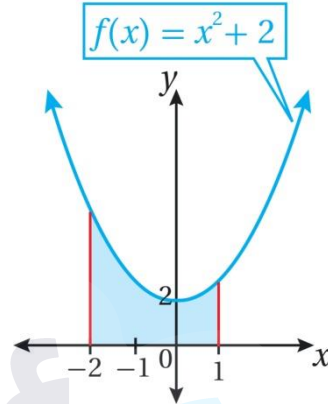


ثالثاً: إيجاد المساحة عن طريق الرسم

Ex: 20

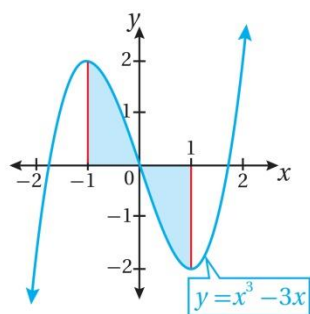
جد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلات
المجاورة:

1

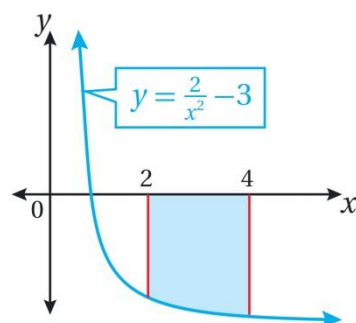


منصة أساس التعليمية

4



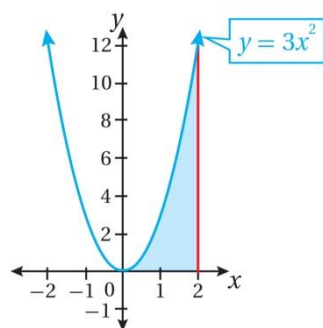
3



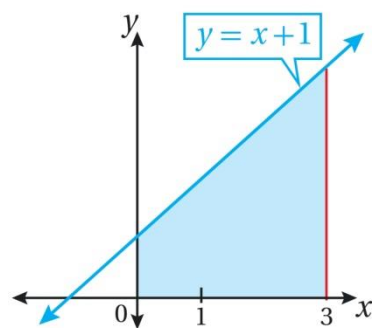
أساس التعليم

منصة أساس التعليمية

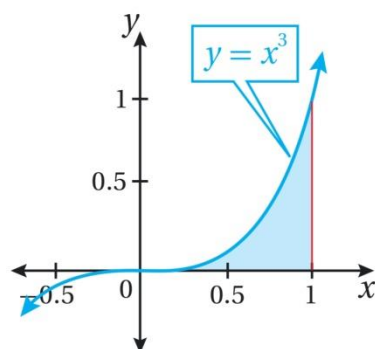
6



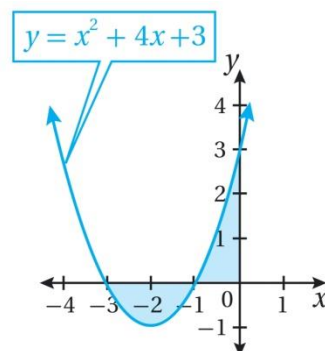
5



8



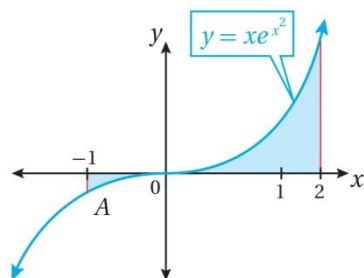
7



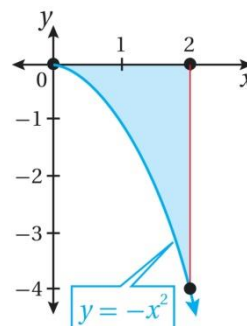
أساس التعليم

منصة أساس التعليمية

10



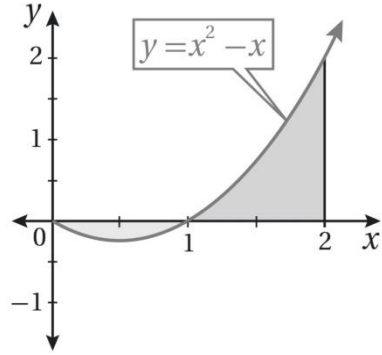
9



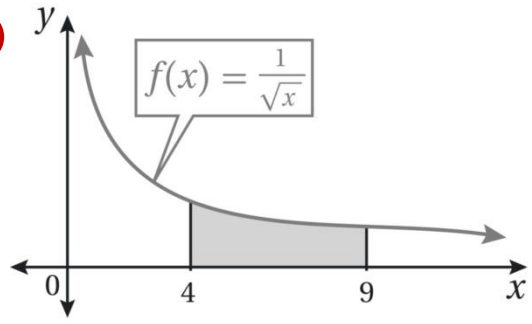
أساس التعليم

منصة أساس التعليمية

12

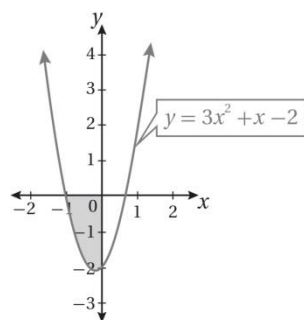


11

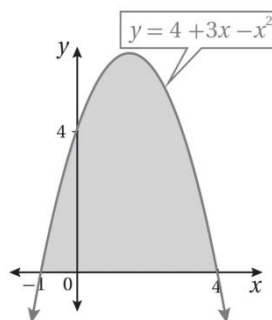


أساس التعليم
منصة أساس التعليمية

14



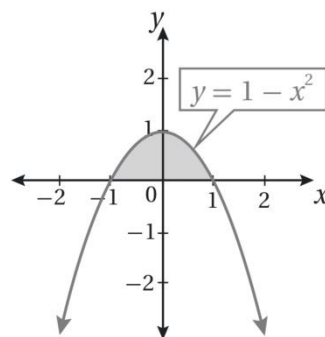
13



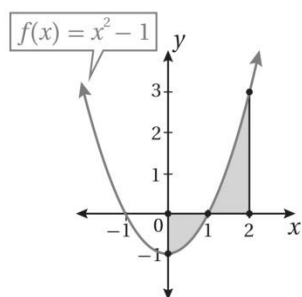
أساس التعليم

منصة أساس التعليمية

15



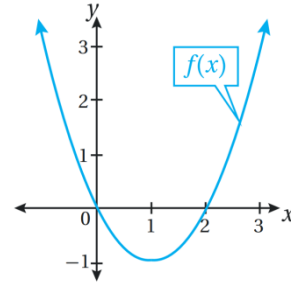
16



منصة أساس التعليمية

Ex: 21

يبيّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 2x$



1 جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى
الاقتران و المحور x .

2 جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى
الاقتران و المحور x و المستقيم $x = 3$.

3 جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى
الاقتران و المحور x و المستقيم $x = -1$.

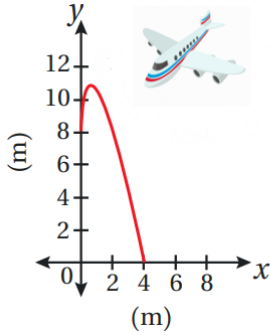
Ex: 22

يبيّن التمثيل البياني المجاور شكل السطح العلوي

لجناح طائرة ممثلاً بالمعادلة: $y = 8 + 8\sqrt{x} - 6x$

حيث: $0 \leq x \leq 4$ جد مساحة السطح العلوي

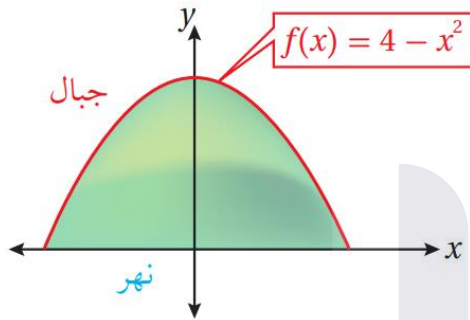
لجناح الطائرة.



منصة أساس التعليمية

Ex: 24

يمثل الجزء المظلل بالأخضر في الشكل المجاور حقول منطقة زراعية تحيط بها سلسلة من الجبال، ويمثل منحنى الاقتران: $f(x) = 4 - x^2$ الحد الفاصل بين سلسلة الجبال والمنطقة الزراعية. ويمثل المحور x حافة النهر الذي يطل على المنطقة الزراعية، جد المساحة الكلية للمنطقة الزراعية، علمًا بأن x, y مقيسان بالكيلو متر.

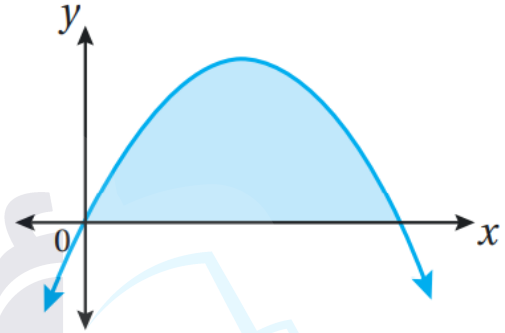


مهارات التفكير العليا



Ex: 23

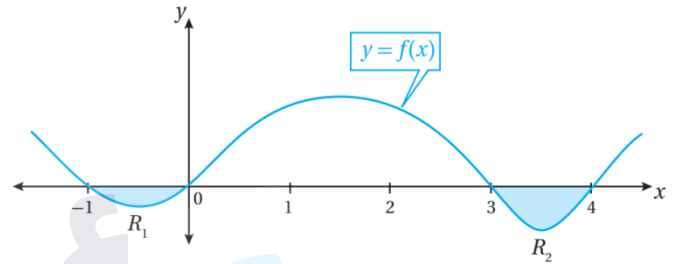
يبيّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $y = kx(4 - x)$ إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x هي 32 وحدة مربعة، فجد قيمة الثابت k .



منصة أساس التعليمية

Ex: 25

يبيّن الشكل التالي منحنى الاقتران $f(x)$ ، اذا كانت مساحة المنطقة R_1 هي وحدتين مربعيتين، ومساحة المنطقة R_2 هي 3 وحدات مربعة، وكان:
 $\int_0^4 f(x) dx = 10$ ، فجد $\int_{-1}^3 f(x) dx$ مبرراً
اجابتك.



Ex: 26

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:
 $f(x) = x^2 + 4$ ، والمحور x والمستقيمين:
 $x = -1, x = 2$.

منصة أساس التعليمية

Ex: 27

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران :
 $f(x) = -\sqrt{x}$ ، والمحور x والمستقيم : $x = 9$

Ex: 28

التكامل المحدود الذي يمكن عن طريقه إيجاد
المساحة بين منحنى الاقتران : $f(x) = 4x - x^2$ و
المحور x ، هو:

- 1 $\int_4^0 (4x - x^2) dx$
- 2 $\int_0^4 (4x - x^2) dx$
- 3 $\int_1^0 (4x - x^2) dx$
- 4 $\int_0^1 (4x - x^2) dx$



تكامل اقترانات خاصة

أولاً: تكامل الجيب و الجتا \sin , \cos

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

Ex: 1

احسب كلاً من التكاملات الآتية:

1 $\int x + \cos x \, dx$

2 $\int 3x^2 + 2 \sin x \, dx$

3 $\int \sin x + \cos x \, dx$

4 $\int 2 \cos x - \sin x \, dx$

5 $\int 5 \cos x + \sqrt{x} \, dx$

6 $\int 4 \sin x - \frac{1}{x^2} \, dx$

7 $\int 9 \cos x + \frac{4}{x^3} \, dx$

8 $\int \sqrt[3]{x} - \sin x \, dx$

9 $\int \frac{\sin x + 3 \cos x}{4} \, dx$

تكامل الجيب و الجتا عند وجود زاوية خطية $(ax \pm b)$

$$\int \cos(ax \pm b) \, dx = \frac{1}{a} \sin(ax \pm b) + C$$

$$\int \sin(ax \pm b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax \pm b) + C$$

10 $\int \cos(6x - 2) \, dx$

11 $\int \sin(3x + 5) \, dx$

12 $\int \cos(2 - 4x) \, dx$

13 $\int \sin(1 - x) \, dx$

14 $\int 2 \sin(4x + 3) \, dx$

15 $\int 5 \cos(2x + 3) + \sqrt[3]{x} \, dx$



ثانيًا: تكامل الاقتران الأسّي:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

26 $\int e^x + 8 dx$

27 $\int 5x^2 + 7e^x dx$

28 $\int \frac{1}{2}e^x + 3x dx$

29 $\int 5e^x + 4 dx$

تكامل الاقتران الأسّي عند وجود قوة خطية $(ax \pm b)$

$$\int e^{ax \pm b} dx = \frac{1}{a} e^{ax \pm b} + C$$

30 $\int e^{2x+3} dx$

31 $\int 2e^{4x+3} dx$

32 $\int 6x^2 - 3e^{7x+1} dx$

33 $\int \sin 5x + e^{2x} dx$

34 $\int (e^x + 1)^2 dx$

16 $\int 4 \cos(3x - 7) dx$

17 $\int 4 \cos(6x + 1) dx$

18 $\int 4x^3 + 2 + 3 \sin(5 - 3x) dx$

19 $\int x - \sin(7x + 2) dx$

20 $\int 3 \sin 3x - 4 \cos x dx$

21 $\int \sin 2x - \cos 2x dx$

22 $\int 5 - \sin(5 - 5x) dx$

23 $\int \sin(2x + 3) + \cos(3x + 2) dx$

24 $\int 3 \sin(3x + 1) dx$

25 $\int 3 \sin 3x + 1 dx$



ثالثاً: تكامل القوس الخطي $(ax \pm b)^n$

$$\int (ax \pm b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax \pm b)^{n+1} + C$$

45 $\int (2x + 7)^5 dx$

46 $\int (7x - 6)^6 dx$

47 $\int (1 - x)^3 dx$

48 $\int \sqrt{2x + 1} dx$

49 $\int e^{6x} + (1 - 2x)^6 dx$

50 $\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}} dx$

51 $\int \frac{3}{(1-4x)^2} dx$

52 $\int \frac{1}{(x-1)^3} dx$

53 $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$

54 $\int (3x + 2)^5 dx$

35 $\int \sqrt{x} + 3e^{6x} dx$

36 $\int \sin(2x - 3) + e^{6x-4} dx$

37 $\int \frac{e^x+7}{e^x} dx$

38 $\int \sqrt{e^x} dx$

39 $\int 5x^2 - 2e^{7x} dx$

40 $\int 2x + 3e^{4x+5} dx$

41 $\int 4e^x(3 + e^{2x}) dx$

42 $\int e^{3x} - e^{-3x} dx$

43 $\int 1 - e^{2x-3} dx$

44 $\int e^{2x} - \frac{1}{2} \sin(2x - 1) dx$



64 $\int \frac{4}{x^3} + \frac{5}{x} dx$

65 $\int \sqrt{x} + 3e^{6x} - \frac{7}{x} dx$

66 $\int \frac{1+xe^x}{x} dx$

67 $\int \frac{1-x^2}{5x} dx$

68 $\int 3 \cos x + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} dx$

69 $\int \frac{1}{8}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{x} dx$

تكامّل الاقتران اللوغاريتمي : $\frac{a}{bx+h}$

$$\int \frac{a}{bx+h} dx = \frac{a}{b} \ln|bx+h| + C$$

70 $\int \frac{1}{8x-1} dx$

71 $\int \frac{6}{7x-2} dx$

رابعًا: تكامل الاقتران اللوغاريتمي على شكل : $\frac{a}{x}$

$$\int \frac{a}{x} dx = a \ln|x| + C$$

55 $\int \frac{3}{x} dx$

56 $\int \frac{1}{x} + 6 \sin x dx$

57 $\int 2e^x + \frac{3}{x} dx$

58 $\int \frac{1}{x} + 8e^x dx$

59 $\int \sin x - \frac{5}{x} dx$

60 $\int \frac{2x^5-4}{x} dx$

61 $\int \frac{x^2-7x+2}{x^2} dx$

62 $\int \frac{x^2+2x+1}{x^2} dx$

63 $\int \frac{1}{x} (x+2) dx$



ملاحظة:

إذا اشتقيت المقام و أعطاك البسط فكر بتكامل اللوغاريتم.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$80 \int \frac{3x^2}{x^3+5} dx$$

$$81 \int \frac{2x+3}{x^2+3x} dx$$

$$82 \int \frac{\cos x}{3+\sin x} dx$$

$$83 \int \frac{e^x}{e^x-1} dx$$

$$84 \int \frac{2x}{x^2-4} dx$$

$$85 \int \frac{e^x}{e^x+4} dx$$

$$72 \int \frac{-7}{1-2x} dx$$

$$73 \int \frac{1}{1-x} dx$$

$$74 \int \frac{1}{1-\frac{1}{4}x} dx$$

$$75 \int \frac{1}{5-\frac{1}{4}x} dx$$

$$76 \int \frac{2}{1-5x} dx$$

$$77 \int \frac{1}{\frac{1}{3}x-2} dx$$

$$78 \int \frac{3}{2x-1} dx$$

$$79 \int 2x - 1 + \frac{8}{5x+4} dx$$



ملاحظة :

إذا كان الرقم في البسط أكبر، اسحب منه

$$94 \int \frac{6x}{x^2+9} dx$$

$$95 \int \frac{9x^2}{x^3+8} dx$$

$$96 \int \frac{\cos x}{3+2\sin x} dx$$

خامسًا: التكامل المحدود للاقتانات الخاصة

$$97 \int_0^1 6e^{-3x} + 12x^3 dx$$

$$98 \int_{-1}^2 (x+1)^3 dx$$

$$99 \int_2^3 \frac{1}{7-2x} dx$$

مكياجها



ملاحظة :

عند اشتقاق المقام وكان الاختلاف بين مشتقة المقام والاقتران الموجود في البسط (رقم)، ضيفه للبسط و اقسام عليه برا التكامل.

$$\text{مثلاً: } \int \frac{x}{x^2+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+3} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+3| + C$$

$$86 \int \frac{x-1}{x^2-2x+2} dx$$

$$87 \int \frac{x+1}{4x^2+8x} dx$$

$$88 \int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5} dx$$

$$89 \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} dx$$

$$90 \int \frac{x^2}{x^3-3} dx$$

$$91 \int \frac{x^2-x}{2x^3-3x^2+12} dx$$

$$92 \int \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$93 \int \frac{x+1}{x^2+2x+5} dx$$

106 $\int_0^1 \frac{6x}{x^2+1} dx$

107 $\int_0^1 \sqrt{1+7x} dx$

109 $\int_0^1 e^x(4 - e^x) dx$

100 $\int_1^3 1 + \frac{1}{x} dx$

100 $\int_0^2 4e^{2x} + 7 dx$

101 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{6x+1}} dx$

102 $\int_0^4 \frac{8x}{x^2+1} dx$

103 $\int_1^2 2x + 3e^x - \frac{4}{x} dx$

104 $\int_0^5 \frac{x}{x^2+10} dx$

105 $\int_3^4 (2x - 6)^4 dx$

Ex: 3

أشارت دراسة إلى أن عدد السكان في إحدى القرى يتغير سنوياً بمعدل يمكن نمذجته بالاقتران:
 $P'(t) = 105e^{0.03t}$ ، حيث t عدد السنوات منذ عام 2010 م ، و $P(t)$ عدد السكان. جد عدد سكان القرية عام 2020 م ، علماً بأن عدد سكانها عام 2010 م هو 3500 شخص.

أسئلة كلامية

Ex: 2

في دراسة أجرتها شركة نفطية، تبين أن معدل إنتاج إحدى الآبار النفطية ينمذج بالاقتران:
 $R'(x) = \frac{100}{t+1} + 5$ ، حيث $R(t)$ عدد البراميل المنتجة (بالآلاف) في السنة، و t عدد السنوات منذ بدء ضخ النفط في البئر. جد عدد براميل النفط المنتجة بعد 9 سنوات من بدء عملية الضخ من البئر، علماً بأن $R(0) = 0$.



Ex: 4

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، و تعطى سرعته المتجهة بالافتراض: $v(t) = e^{-2t}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم $2m$ ، فجد موقع الجسيم بعد t ثانية من بدء الحركة.

Ex: 5

إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{3}{x+e}$ ، فجد قاعدة العلاقة y ، علمًا بأن منحناها يمر بالنقطة (e, e^2) .



Ex: 6

في دراسة تناولت أسماكاً في بحيرة، تبين أن عدد الأسماك $P(t)$ يتغير بمعدل:

$$P'(t) = -0.51e^{-0.03t}, \text{ حيث } t \text{ الزمن بالسنوات}$$

بعد بدء الدراسة:

1 جد قاعدة الاقتران $P(t)$ عند أي زمن t ، علماً بأن

عدد الأسماك عند بدء الدراسة هو 1000 سمكة.

2 جد عدد الأسماك بعد 10 سنوات من بدء

الدراسة؟

Ex: 7

يلتئم جرح جلدي بمعدل يمكن نمذجته بالاقتران:

$$A'(t) = -0.9e^{-0.1t}, \text{ حيث } t \text{ عدد الايام بعد}$$

الاصابة بالجرح، $A(t)$ مساحة سطح الجرح

بالسنتيمتر المربع:

1 جد قاعدة الاقتران $A(t)$ عند أي زمن t ، علماً بأن

مساحة سطح الجرح عند الإصابة هي 9 cm^3

2 جد مساحة سطح الجرح بعد 5 أيام من الإصابة.



Ex: 8

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتان $f(x)$ ، و نقطة يمر بها منحنى $y = f(x)$. استعمال المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتان $f(x)$:

1 $f'(x) = 5e^x$, $(0, \frac{1}{2})$

2 $f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$, $(1, -1)$

3 $f'(x) = e^{-x} + x^2$, $(0, 4)$

Ex: 9

يعالج التلوث في بحيرة باستعمال مضاد للبكتيريا. إذا كان عدد الخلايا البكتيرية الضارة لكل مليلتر من الماء في البحيرة يتغير بمعدل: $N'(t) = \frac{2000t}{1+t^2}$ ، حيث $N(t)$ عدد الخلايا البكتيرية لكل مليلتر من المادة بعد t يومًا من استعمال المضاد، فجد $N(t)$ ، علمًا بأن العدد الابتدائي للخلايا هو 5000 خلية لكل مليلتر.

Ex: 10

يتحرك جسيم من السكون، و يعطى تسارعه بالاقتران:
 $a(t) = \cos(3t - \pi)$ ، حيث t الزمن بالثواني، و a
 تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. جد سرعة الجسيم بعد
 t ثانية من بدء الحركة.

Ex: 11

يتغير عدد الطلبة الذين يلتحقون باحدى الجامعات
 الجديدة سنويًا بمعدل: $P'(t) = \frac{5000}{\sqrt{(t+1)^3}}$ ، حيث
 $P(t)$ عدد الطلبة الملتحقين بالجامعة، و t الزمن
 بالسنوات منذ تأسيس الجامعة. جد عدد الطلبة الذين
 درسوا في الجامعة بعد 3 سنوات من تأسيسها، علمًا
 بأن عددهم عند تأسيس لجامعة بلغ 2000 طالب.



Ex: 12

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، و تعطى سرعته المتجهة بالافتراض: $v(t) = 5 + e^{t-2}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية. إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل، فجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة.

Ex: 13

قيمة: $\int_0^2 e^{2x} dx$ هي:

a) $e^4 - 1$

b) $e^4 - 2$

c) $2e^4 - 2$

d) $\frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}$

Ex: 14

قيمة: $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ هي:

a) -2

b) $-\frac{7}{16}$

c) $\frac{1}{2}$

d) 2

مهارات التفكير العليا

Ex: 15

اكتشف الخطأ: أوجد أحمد ناتج التكامل: $\int \frac{1}{2x} dx$

وكان حله على النحو الآتي:
اكتشف الخطأ في حل أحمد، ثم صحّحه.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2x} dx &= \int \frac{2 \times 1}{2x} dx \\ &= \int \frac{2}{2x} dx \\ &= \ln |2x| + C \end{aligned}$$

Ex: 19

إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو:

$$\frac{dy}{dx} = 6e^{2x} + 2e^{-x}$$

فجد قاعدة العلاقة y ، علمًا

بأن منحناها يمر بالنقطة $(0, 2)$.

Ex: 16

اكتشف المختلف: أي التكاملات الآتية مختلف، مبررًا
اجابتك.

$$\int \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$$

$$\int \frac{1}{x+1} dx$$

$$\int (x-1)^3 dx$$

Ex: 17

حدّد وجه الاختلاف بين التكاملين الآتيين من دون
إيجاد التكامل:

$$\int (3 \sin 3x + 1) dx$$

$$\int (3 \sin(3x + 1)) dx$$

Ex: 18

جد قيمة التكامل : $\int (x^2 + 2x + 1)^5 dx$

منصة أساس التعليمية

الواجب:

كتاب الطالب (صفحة 67)

التمارين: 40 + 41 + 42 + 43 + 44 + 47

كتاب التمارين: (صفحة 13)

التمارين: 20 + 21 + 22

التكامل بالتعويض

عند صعوبة التخلص من عملية الضرب أو القسمة
نستخدم التكامل بالتعويض.

خطوات الحل:

1. افرض ما تحت القوة u .
2. اشتقها بالنسبة لـ x .
3. اجعل dx موضوع القانون.
4. اختصر واملأ.

Ex: 1

جد قيمة: $\int 2x(x^2 + 6) dx$

Ex: 2

جد قيمة: $\int 2x(x^2 + 6)^3 dx$

Ex: 3

جد قيمة: $\int 2x(x^2 - 3)^5 dx$

Ex: 4

جد قيمة: $\int 3x^2(x^3 + 1)^7 dx$

Ex: 5

جد قيمة: $\int 6x^2(2x^3 - 3)^4 dx$

Ex: 9

جد قيمة: $\int 2x \sqrt{x^2 + 6} dx$

Ex: 6

جد قيمة: $\int (2x^2 - 2x - 1)(x^3 - x^2 - x)^4 dx$

Ex: 10

جد قيمة: $\int 3x \sqrt{x^2 + 7} dx$

Ex: 7

جد قيمة: $\int x^2 (2x^3 + 5)^4 dx$

Ex: 11

جد قيمة: $\int x \sqrt{x^2 + 3} dx$

Ex: 8

جد قيمة: $\int (x + 1)(x^2 + 2x + 5)^4 dx$

Ex: 15

جد قيمة: $\int \frac{3x-3}{\sqrt{x^2-2x+4}} dx$

Ex: 12

جد قيمة: $\int \frac{x^4}{(x^5+9)^3} dx$

Ex: 13

جد قيمة: $\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x}} dx$

Ex: 16

جد قيمة: $\int \frac{1+x}{(4+2x+x^2)^8} dx$

Ex: 14

جد قيمة: $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx$

منصة أساس التعليمية

ملاحظة :

التكامل بالتعويض (الأسّي)
عند وجود أي اقتران أسّي مرفوع لقوة غير خطية،
افرضها مباشرة و انت مغمض.

Ex: 17

جد قيمة: $\int x e^{x^2+1} dx$

Ex: 19

جد قيمة: $\int (3x^2 - 1) e^{x^3-x} dx$

Ex: 20

جد قيمة: $\int 2x e^{x^2-1} dx$

Ex: 18

جد قيمة: $\int x^6 e^{1-x^7} dx$

Ex: 21

جد قيمة: $\int x^4 e^{x^5+2} dx$

Ex: 22

جد قيمة: $\int \cos x e^{\sin x} dx$

Ex: 24

جد قيمة: $\int \frac{\ln x}{x} dx$

Ex: 23

جد قيمة: $\int \frac{\cos x}{e^{\sin x}} dx$

Ex: 25

جد قيمة: $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

Ex: 26

جد قيمة: $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

ملاحظة :

التكامل بالتعويض (اللوغاريتمي)
عند وجود أي تكامل داخله لوغاريتم، افرض
 $u = \ln x$ مباشرة وانت مغمض

ملاحظة :

التكامل بالتعويض (للجيب و الجتا)
عن وجود زاوية غير خطية داخل كلاً من الجيب و
الجتا افرضها مباشرة و انت مغمض.

Ex: 29

جد قيمة: $\int x^4 \sin(x^5 - 8) dx$

Ex: 27

جد قيمة: $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$

Ex: 28

جد قيمة: $\int \frac{(\ln x)^3}{x} dx$

Ex: 30

جد قيمة: $\int x^3 \cos(x^4 - 5) dx$

منصة أساس التعليمية

Ex: 34

جد قيمة: $\int \sin x \sqrt{1 + 3 \cos x} dx$

Ex: 31

جد قيمة: $\int x \sin (3 + x^2) dx$

Ex: 32

جد قيمة: $\int \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x^2} dx$

ملاحظة:

عند وجود اقتران: $\sin^n x \cos x$, $\cos^n x \sin x$
افرض ما تحت القوة وانت مغمض.

Ex: 35

جد قيمة: $\int \sin^3 x \cos x dx$

Ex: 33

جد قيمة: $\int \sin x (1 + \cos x)^4 dx$

Ex: 39

جد قيمة: $\int e^x(2 + e^x)^5 dx$

Ex: 36

جد قيمة: $\int \cos^4 x \sin x dx$

Ex: 37

جد قيمة: $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$

التكامل بالتعويض "المحدود":

Ex: 40

جد قيمة كلاً من التكاملات الآتية:

1 $\int_1^2 4x (x^2 + 1)^3 dx$

Ex: 38

جد قيمة: $\int \sin^5 2x \cos 2x dx$

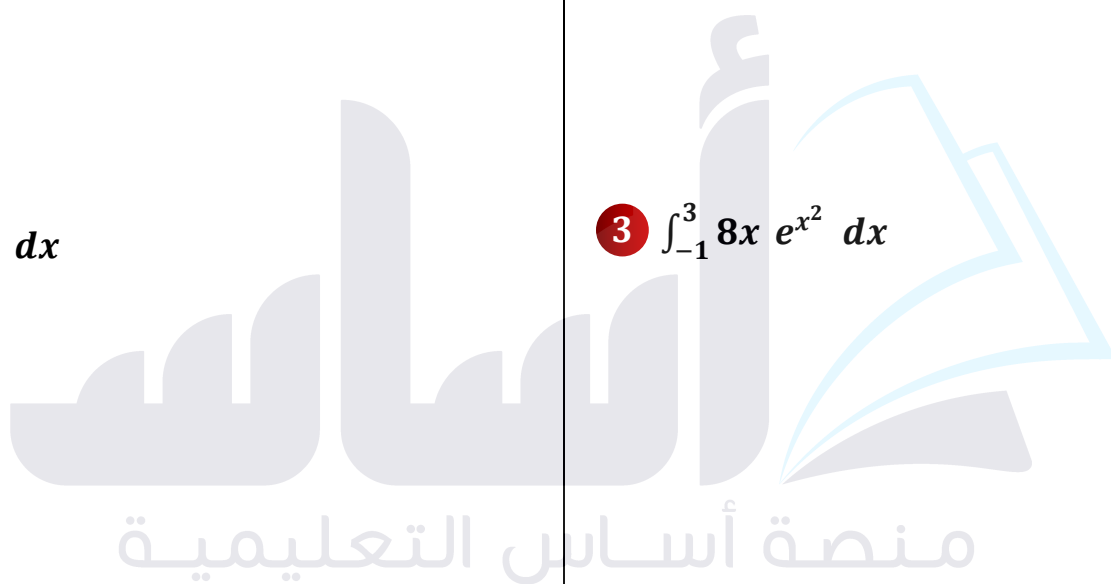
منصة أساس التعليمية

$$4 \int_{-1}^0 \frac{x^3}{(2-x^4)^7} dx$$

$$2 \int_0^1 (x+1)\sqrt{x^2+2x} dx$$

$$5 \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

$$3 \int_{-1}^3 8x e^{x^2} dx$$

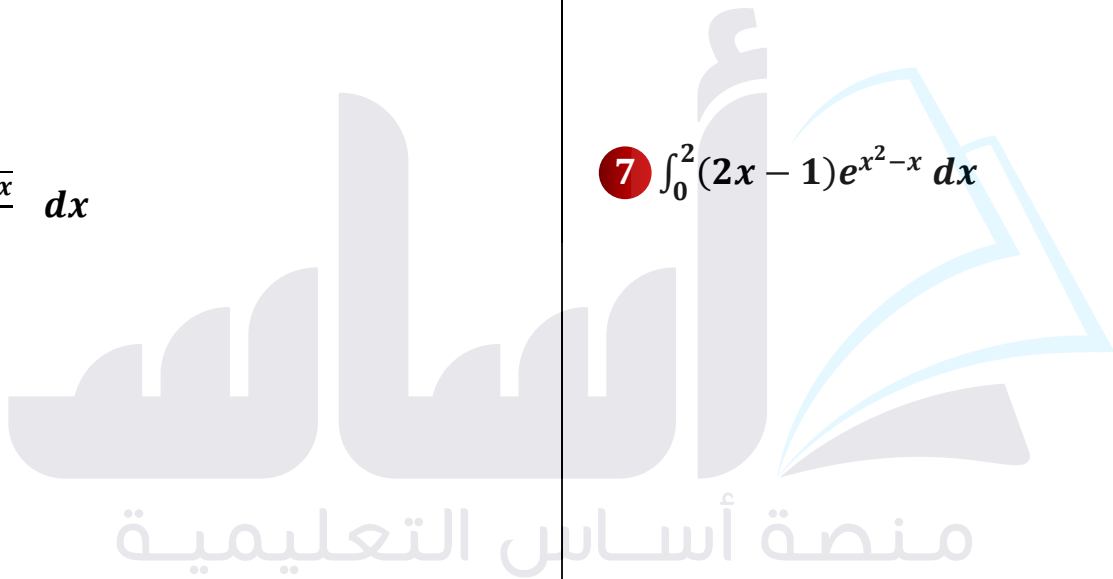


8 $\int_1^2 \frac{e^x}{x^2} dx$

6 $\int_0^1 x^2(x^3 - 1)^4 dx$

9 $\int_e^{e^3} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

7 $\int_0^2 (2x - 1)e^{x^2 - x} dx$



الواجب:

كتاب الطالب: (صفحة 63)

التمارين: 19 + 20 + 21

كتاب التمارين: (صفحة 14)

التمارين: 7 + 8 + 9 + 10

اسئلة الوحدة: (صفحة 66)

التمارين: 35 + 36



Ex: 41

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، و تعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \frac{-2t}{\sqrt{(1+t^2)^3}}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v السرعة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم $4m$ ، فجد موقع الجسيم بعد t ثانية من بدء الحركة.

Ex: 42

في كلٍ مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ، و نقطة يمر بها منحنى $y = f(x)$ ، استعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

1 $f'(x) = x e^{4-x^2}$, $(-2, 1)$

2 $f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$, $(0, -1)$

منصة أساس التعليمية

Ex: 43

يمثل الاقتران : $p(x)$ سعر حذاء رياضي بالدينار،
حيث x عدد الأحذية المباعة بالمئات. إذا كان:
 $P'(x) = \frac{-136}{\sqrt{9+x^2}}$ هو معدل التغير في سعر الحذاء،
فجد $P(x)$ ، علمًا بأن سعر الحذاء الواحد $JD 30$
عندما يكون عدد الأحذية المباعة 400 حذاء.

Ex: 44

يمثل الاقتران : $P(x)$ سعر القطعة الواحدة (بالدينار)
من منتج معين، حيث x عدد القطع المباعة (بالمئات)
من المنتج. إذا كان: $P'(x) = \frac{-300x}{\sqrt{(36+x^2)^3}}$ هو معدل
التغير في سعر القطعة الواحدة من المنتج، فجد
 $p(x)$ ، علمًا بأن سعر القطعة الواحدة $JD 75$ عندما
يكون عدد القطع المباعة 800 قطعة.



Ex: 45

يمثل الاقتران $C(x)$ تركيز دواء في الدم بعد t ساعة من حقنه في جسم المريض، حيث C مقيسة بالمليغرام لكل سنتيمتر مكعب (mg/cm^3). إذا كان تركيز الدواء في دم المريض يتغير بمعدل: $C'(t) = \frac{0.3t}{\sqrt{t^2+16}}$ ، فجد مقدار التغير في تركيز الدواء بالدم خلال الساعات الثلاث الأولى التي تلت حقنه في جسم المريض.

Ex: 46

يمثل الاقتران: $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t ساعة من حقنه في جسم مريض، حيث C مقيسة بالمليغرام لكل سنتيمتر مكعب (mg/cm^3). إذا كان تركيز الدواء في دم المريض يتغير بمعدل: $C'(t) = \frac{3t}{\sqrt{(t^2+36)^3}}$ ، فجد مقدار التغير في تركيز الدواء بالدم خلال الساعات الثماني الأولى التي تلت حقنه في جسم المريض.



Ex: 47

أشارت دراسة إلى أن عدد السكان في إحدى المدن يتغير سنوياً بمعدل يمكن نمذجته بالاقتران:

$$P'(t) = \frac{4e^{0.2t}}{\sqrt{4+e^{0.2t}}}$$

2015 م، و $P(t)$ عدد السكان بالآلاف. جد مقدار الزيادة في عدد سكان المدينة من عام 2015 م إلى عام 2025 م.

Ex: 48

يمثل الاقتران $V(t)$ سعر دونم أرض زراعية في الأغوار الأردنية (بالدينار) بعد t سنة من الآن. إذا كان:

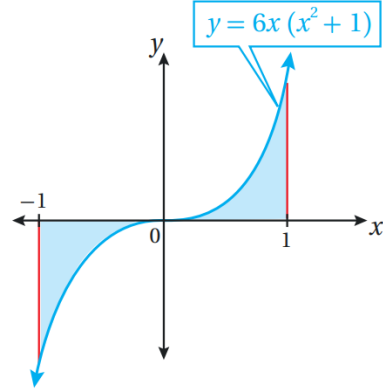
$$V(t) = \frac{0.4 t^3}{\sqrt[3]{0.2t^4 + 8000}}$$

الأرض، فجد $V(t)$ ، علماً بأن سعره الآن 5000 JD.

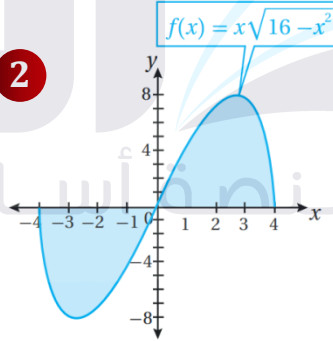


Ex: 49

جد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلين
البيانين الآتيين:



2



Ex: 50

يمثل الاقتران: $R'(x) = 50 + 3.5xe^{-0.1x^2}$ الإيراد الحدي (بالدينار) لكل قطعة تباع من انتاج إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المباعة، و $R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. جد اقتران الإيراد $R(x)$ ، علمًا بأن $R(0) = 0$.

Ex: 53

إذا كان: $\int_0^k kx^2 e^{x^3} dx = \frac{2}{3}(e^8 - 1)$ ، فجد قيمة الثابت k .

مهارات التفكير العليا

Ex: 51

اكتشف المختلف: أي التكاملات الآتية مختلف، مبرراً اجابتك؟

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+3x)^2} dx$$

$$\int 3x^2 e^{1+x^3} dx$$

$$\int x \cos x^2 dx$$

$$\int x(x^3 + 1) dx$$

Ex: 52

اكتشف الخطأ: أوجدت سعاد ناتج التكامل:

$\int_0^1 8x(x^2 + 1)^3 dx$ ، وكان حلها على النحو الآتي:

$$\begin{aligned} \int_0^1 8x(x^2 + 1)^3 dx &= \int_0^1 8x \times u^3 \times \frac{du}{2x} \\ &= \int_0^1 4u^3 du \\ &= u^4 \Big|_0^1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

اكتشف الخطأ في حل سعاد ، ثم صحّحه.

الواجب:

كتاب الطالب اسئلة الوحدة (صفحة 67)

التمارين: 34 + 42 + 41 + 40

كتاب التمارين : (صفحة 14)

التمارين : 15 + 14 + 13 + 11

