أساس
توجيهي

الأساس في
الرياضيات
أدبي

التكامل

الأستاذ
بلال أبو دريّع

@ بلال أبو دريّع

0785 351 625

التوجيهي

مراجعة قواعد الاشتقاق

جد مشتقة الاقترانات الاتية :

1) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ الحل

$f'(x) = 4x + 3$

2) $f(x) = 3x^{-5} + 9x - 8$ الحل

$f'(x) = -15x^{-6} + 9$

3) $f(x) = \sqrt{x}$ الحل

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4) $f(x) = 3\sqrt[3]{x}$ الحل

نجهز $f(x) = 3x^{\frac{1}{3}}$

$$f'(x) = 3.\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = x^{-\frac{2}{3}}$$

5) $f(x) = \dfrac{2}{x^{\frac{5}{2}}}$ الحل

$$f(x) = 2x^{-\frac{5}{2}}$$

$$f'(x) = -5x^{-\frac{7}{2}}$$

6) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$ الحل

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x}}$$

7) $f(x) = (2x^3 + 5)^7$ الحل

$f'(x) = 7(2x^3 + 5)^6.(6x^2)$

8) $f(x) = \ln(5x^2 + 7)$ الحل

$$f'(x) = \frac{10x}{5x^2 + 7}$$

9) $f(x) = e^{7x+1}$ الحل

$f'(x) = e^{7x+1}.7$

10) $f(x) = (2x + 3)(x^2 - 5)$ الحل

مشتقة ضرب

$f'(x) = (2x + 3)(2x) + (x^2 - 5)(2)$

11) $f(x) = \frac{x}{2x+5}$ الحل

مشتقة قسمة اقترانين

$$f'(x) = \frac{(2x + 5)(1) - (x)(2)}{(2x + 5)^2}$$

12) $f(x) = \cos x + 2\sin x$ الحل

$f'(x) = -\sin x + 2\cos x$

13) $f(x) = \sin 2x$ الحل

$f'(x) = 2\cos 2x$

14) $f(x) = \dfrac{\cos x}{2} + e^{\sin x}$ الحل

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{2} + e^{\sin x}.\cos x$$

الدرس الأول

التكامل غير المحدود

الاقتران الأصلي للاقتران $f(x)$ هو الاقتران يلي بنشتقه بعطينا $f(x)$.

مثلاً: الاقتران الأصلي للاقتران $f(x) = 3x^2$ هو الاقتران $F(x) = x^3 + c$ حيث c ثابت.

مفهوم

الاقتران الأصلي للاقتران $f(x)$ يكتب في صورة : $F(x) + c$ حيث c عدد ثابت.

و $F(x) = f'(x)$

أمثلة

أجد اقتراناً أصلياً لكل من الاقترانات الآتية:

1) $f(x) = 6x^5$

الحل

$F(x) = x^6 + c$

2) $f(x) = -3x^{-4}$

الحل

$F(x) = x^{-3} + c$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

الحل

$F(x) = \ln x + c$

لاحظ أن مشتقة $\ln x$ تساوي $\frac{1}{x}$

4) $f(x) = e^x$

الحل

$F(x) = e^x + c$

تمرين أتحقق من فهمي

جد اقتراناً أصلياً للإقترانات الآتية:

a) $f(x) = 5x^4$

b) $f(x) = -9x^{-10}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

تسمى عملية إيجاد الاقتران الأصلي بالتكامل ($\int$) وهو العملية العكسية للاشتقاق.

عناصر التكامل:

المكامل

$$\int 3x^2\, dx = x^3 + c$$

رمز التكامل

متغير التكامل

ثابت التكامل

إن النجاح لا يتطلب عذراً، والفشل لا يترك أي مبررات

الدرس 1

قواعد التكامل

1 تكامل الثابت

$$\int K\,dx = Kx + c$$

حيث K ← عدد حقيقي.

أمثلة جد التكاملات الآتية:

1) $\int 2dx$

الحل

$= 2x + c$

2) $\int -7\,dx$

الحل

$= -7x + c$

3) $\int dx$

الحل

$= x + c$

4) $\int 12\,dm$

الحل

$= 12m + c$

5) $\int \frac{2}{3}dr$

الحل

$= \frac{2}{3}r + c$

6) $\int e\,\,dx$

الحل

$= ex + c$

7) $\int \pi\,dx$

الحل

$= \pi\,x + c$

8) $\int \frac{dx}{3}$

الحل

$= \frac{1}{3}x + c$

ملاحظة: $\frac{dx}{3} = \frac{1}{3}dx$

2 تكامل اقتران القوة

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$(n \neq -1)$$

حالات القوة

1 القوة عدد صحيح موجب.

أمثلة جد التكاملات الآتية:

1) $\int x^5\, dx$

الحل

$$= \frac{x^6}{6} + c = \frac{1}{6}x^6 + c$$

ملاحظة :

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{a}x$$

2) $\int x^2\, dx$

الحل

$$= \frac{x^3}{3} + c = \frac{1}{3}x + c$$

3) $\int x\, dx$

الحل

$$= \frac{x^2}{2} + c = \frac{1}{2}x^2 + c$$

4) $\int x^9\, dx$

الحل

$$= \frac{x^{10}}{10} + c = \frac{1}{10}x^{10} + c$$

5) $\int m^6\, dm$

الحل

$$= \frac{m^7}{7} + c = \frac{1}{7}m^7 + c$$

6) $\int r\, dr$

الحل

$$= \frac{r^2}{2} + c$$

نكشة مخ

$$\int d \quad dd$$

انت اسطورة اذا تعرفها.....

2 القوة عدد صحيح سالب

أمثلة جد التكاملات الآتية:

1) $\int x^{-3}\, dx$

الحل

$$= \frac{x^{-2}}{-2} + c = \frac{-1}{2}x^{-2} + c$$

ملاحظة:

$$-\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$$

كلهم نفس الأشي.....

2) $\int x^{-2} dx$

الحل

$$= \frac{x^{-1}}{-1} + c = -x^{-1} + c = \frac{-1}{x} + c$$

3) $\int x^{-7}\,dx$

الحل

$= \dfrac{x^{-6}}{-6} + c$

4) $v^{-9}dv$

الحل

$= \dfrac{v^{-8}}{-8} + c$

3 إذا كانت القوة = 1- (حالة خاصة)

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$$

لأنه مشتقة $\ln|x|$ تساوي $\frac{1}{x}$

4 إذا كانت القوة كسر

1) $\int x^{\frac{3}{4}}\,dx$

الحل

$$= \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + c = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + c$$

ملاحظة:

عند زيادة (1) إلى كسر:

$\dfrac{\text{بسط}}{\text{مقام}} + 1 \Rightarrow \dfrac{\text{المقام + البسط}}{\text{المقام}}$

2) $\int x^{\frac{5}{2}}\,dx$

الحل

$= \dfrac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + c$

3) $\int x^{\frac{3}{4}}dx$

الحل

$= \dfrac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + c$

4) $\int x^{-\frac{1}{5}}\,dx$

الحل

$= \dfrac{5}{4}x^{\frac{4}{5}} + c$

5) $\int x^{\frac{-7}{4}}\,dx$

الحل

$= -\dfrac{4}{3}x^{-\frac{3}{4}} + c$

حالات التجهيز قبل التكامل

هناك بعض الحالات لا يمكن تكاملها إلا بعد عملية التجهيز.

1 تجهيز الجذور

قاعدة:

تجهيز الجذور: $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

أمثلة

جد التكاملات الآتية:

1) $\int \sqrt{x}\,dx$

الحل

تجهيز: $\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$

تكامل: $\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

النجاح ليس عدم فعل الأخطاء، النجاح هو عدم تكرار الأخطاء

2) $\int \sqrt[5]{x^3}\,dx$

الحل

تجهيز: $\int x^{\frac{3}{5}}\,dx$

تكامل: $\frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}}+c$

3) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$

الحل

تجهيز: $\int x^{\frac{2}{3}}\,dx$

تكامل: $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+c$

4) $\int \sqrt{x^7}\,dx$

الحل

تجهيز: $\int x^{\frac{7}{2}}\,dx$

تجهيز: $\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}+c$

2 تجهيز $\left(\frac{1}{x^n}\right)$

قاعدة:

$$\frac{1}{x^n}=x^{-n}$$

وبشكل عام $\frac{a}{x^n}=ax^{-n}$

أمثلة

جد التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{1}{x^4}\,dx$

الحل

تجهيز: $\int x^{-4}\,dx$

تكامل: $\frac{x^{-3}}{-3}+c=-\frac{1}{3}x^{-3}+c$

2) $\int \frac{1}{x^{-3}}\,dx$

الحل

تجهيز: $\int x^3\,dx$

تكامل: $\frac{x^4}{4}+c=\frac{1}{4}x^4+c$

3) $\int \frac{1}{x^{\frac{2}{5}}}\,dx$

الحل

تجهيز: $\int x^{-\frac{2}{5}}\,dx$

تكامل: $\frac{5}{3}x^{\frac{3}{5}}+c$

4) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

الحل

نجهز: $\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx$

نجهز كمان: $\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$

نكامل: $\frac{2}{1}x^{\frac{1}{2}}+c=2x^{\frac{1}{2}}+c$

5) $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx$

الحل

تجهيز: $\int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx=\int x^{-\frac{3}{2}}\,dx$

تكامل: $\frac{2}{-1}x^{-\frac{1}{2}}+c=-2x^{-\frac{1}{2}}+c$

النجاح يتكون من الانتقال من الفشل إلى فشل دون فقدان الحماس

0785351625

خصائص التكامل الغير محدد

خصائص تسهل إيجاد الاقترانات التي تحوي التي تحوي أكثر من حد:

1) $\int K\ f(x)dx$ حيث K ثابت،

$$= K\int f(x)\,dx$$

تكامل الاقتران المضروب في ثابت

← نخرج الثابت خارج التكامل

2)

تكامل المجموع والفرق

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx$$

$$= \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

نوزع التكامل في عملية الجمع والطرح فقط.

1) $\int 6x^5 dx$

الحل

$$= 6\int x^5\,dx$$

$$= 6\frac{x^6}{6} + c = x^6 + c$$

2) $3x^2 dx$

الحل

$$= 3\int x^2\,dx = 3\frac{x^3}{3} + c = x^3 + c$$

تمرين أتحقق من فهمي

جد التكاملات الآتية:

a) $\int 6\,dx$

b) $\int x^8\,dx$

c) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$

d) $\int \frac{1}{x^5}\,dx$

e) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

3) $\int (6x^2 + 2x)dx$

الحل

نوزع التكامل

$$= \int 6x^2\,dx + \int 2x\,dx$$

$$= 6\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + c$$

$$= 2x^3 + x^2 + c$$

4) $\int (2 + x^3 + 5x^{-2})dx$

الحل

نوزع التكامل ونكامل كل اقتران لوحده

$$= \int 2dx + \int x^3 dx + \int 5x^{-2}\,dx$$

$$= 2x + \frac{x^4}{4} + \frac{5x^{-1}}{-1} + c$$

5) $\int 2x^7 - \frac{4}{x^4}\,dx$

الحل

$$\text{نجهز} = \int 2x^7\,dx - \int \frac{4}{x^4}dx$$

$$\text{نكامل}\ \frac{2x^8}{8} - 4\frac{x^{-3}}{3} + c$$

$$= \frac{1}{4}x^8 - \frac{4}{3}x^{-3} + c$$

6) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^5}\right)dx$

الحل

$$\text{نجهز} = \int x^{\frac{-1}{2}}\,dx - \int \frac{3}{x^5}dx$$

$$\text{نكامل}\ \frac{2}{1}x^{\frac{1}{2}} - 3\frac{x^{-4}}{-4} + c = 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}x^{-4} + c$$

7) $\int (\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}})\,dx$

الحل

$$\text{نجهز} = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx - \int 3x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\text{نكامل} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3\,.\frac{2}{1}x^{\frac{1}{2}} + c$$

$$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 6x^{\frac{1}{2}} + c$$

8) $\int (8x^3 + 6x - \frac{4}{\sqrt{x}})\,dx$

الحل

$$\text{نجهز} = \int (8x^3 + 6x - 4x^{\frac{1}{2}})\,dx$$

$$\text{نكامل} = 8\frac{x^4}{4} + \frac{6x^2}{2} - 4.\frac{2}{1}x^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= 2x^4 + 3x^2 - 8x^{\frac{1}{2}} + c$$

9) $\int \frac{7}{x^2} + \sqrt[3]{x^4}\,dx$

الحل

$$\text{نجهز} = \int (7x^{-2} + x^{\frac{4}{3}})\,dx$$

$$\text{نكامل} = 7\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + c$$

$$= -7x^{-1} + \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + c$$

10) $\int \left(\frac{x^2}{3} + \frac{3}{x^2}\right)dx$

الحل

$$\text{نجهز}\ \int \left(\frac{1}{3}x^2 + 3x^{-2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{1}{9}x^3 - 3x^{-1} + c$$

إن النجاح هو محصلة اجتهادات صغيرة تتراكم يوما بعد يوم

$$11)\ \int \left(3x^{-2}+6x^{-\frac{1}{2}}+x-4\right)dx$$

الحل

$$3\frac{x^{-1}}{-1}+6\frac{2}{1}x^{\frac{1}{2}}+\frac{x^{2}}{2}-4x+c$$

تمرين أتحقق من فهمي

جد التكاملات الآتية:

$a)\ \left(x^{3}-2x^{\frac{5}{3}}\right)dx$

$b)\ \left(3x^{2}-\frac{6}{\sqrt[5]{x}}\right)dx$

$c)\ (3-x-2x^{5})dx$

$d)\ \left(\frac{2}{x^{3}}-3\sqrt{x}\right)dx$

$e)\ \left(\frac{x^{3}}{5}-\frac{7}{x^{3}}\right)dx$

3 تجهيز الضرب والقسمة

في عملية الضرب والقسمة داخل التكامل مافيه قواعد مثل الاشتقاق نقوم بتجهيز السؤال

أمثلة:

$1)\ x(4x^{3}-4x+1)dx$

الحل

تجهيز $= \int (4x^{4}-4x^{2}+x)dx$

تكامل $4\frac{x^{5}}{5}-4\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{2}}{2}+c$

$2)\ \int (x+2)(x-2)dx$

الحل

فرق مربعين

$$\int (x+2)(x-2)dx=\int x^{2}-4dx$$

$$=\frac{x^{3}}{3}-4x+c$$

$3)\ \int (x-1)(x+3)dx$

الحل

نفكك الاقواس

$$\int (x-1)(x+3)dx$$

تجهيز $\int (x^{2}+3x-x-3)dx$

تجميع $= \int (x^{2}+2x-3)dx$

تكامل $\frac{x^{3}}{3}+\frac{2x^{2}}{2}-3x+c$

$$=\frac{x^{3}}{3}+x^{2}-3x+c$$

إن النجاح هو الحصول على ما تريد ، والسعادة ان تريد ماتحصل عليه

4) $\int (x+4)^2 dx$

الحل

تجهيز $\int (x+4)(x+4)dx$

تفكيك $\int (x^2+4x+4x+16)dx$

تجميع $= \int (x^2+8x+16)dx$

تكامل $\frac{x^3}{3}+\frac{8x^2}{2}+16x+c$

$= \frac{1}{3}x^3+4x^2+16x+c$

5) $\int \frac{8x^3+5x}{x}dx$

الحل

تجهيزعامل مشترك x

$\int \frac{x(8x^2+5)}{x}dx$

$= \int (8x^2+5)dx$

تكامل $\frac{8x^3}{3}+5x+c$

6) $\int \left(\frac{x^3+7x-2x^2}{x}\right) dx$

الحل

تجهيزعامل مشترك x

$\int \frac{x(x^2+7-2x)}{x}dx$

$= \int (x^2+7-2x)dx$

تكامل $\frac{x^3}{3}+7x-\frac{2x^2}{2}+c$

$\frac{1}{3}x^3+7x-x^2+c$

7) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx$

الحل

مجموع مكعبين تذكر القاعدة:

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$= \int \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}dx$

$= \int (x+1)dx$

$= \frac{x^2}{2}+x+c$

8) $\int \frac{x^3+8}{x+2}dx$

الحل

فرق مربعين تذكر القاعدة:

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$= \int \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)}dx$

$= \int (x^2-2x+4)dx$

$= \frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+4x+c$

$= \frac{1}{3}x^3-x^2+4x+c$

9) $\int \frac{x^2+2x+1}{x+1}\,dx$

الحل

عبارة تربيعيّة

نجهز $\int \frac{(x+1)(x+1)}{x+1}\,dx$

$= \int (x+1)\,dx$

$= \frac{x^2}{2} + x + c$

10) $\int \frac{x^2-1}{x^2}\,dx$

الحل

نوزع البسط على المقام قلب الحب الرياضي

$\int \frac{x^2-1}{x^2}\,dx$

$\int \frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}\,dx = \int 1 - x^{-2}\,dx$

$x - \frac{x^{-1}}{-1} + c = x + x^{-1} + c$

11) $\int \frac{5-x}{x^5}\,dx$

الحل

نوزع البسط على المقام

تجهيز $\int \frac{5-x}{x^5}\,dx$

$\int \frac{5}{x^5} - \frac{x}{x^5}\,dx = \int 5x^{-5} - \frac{1}{x^4}\,dx$

$= \int 5x^{-5} - x^{-4}\,dx$

نكامل $= \frac{5x^{-4}}{-4} - \frac{x^{-3}}{-3} + c$

$= \frac{-5}{4}x^{-4} + \frac{1}{3}x^{-3} + c$

12) $\int \frac{4+2\sqrt{x}}{x^2}\,dx$

الحل

نوزع البسط على المقام

تجهيز $\int \frac{4}{x^2} + \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x^2}\,dx = \int 4x^{-2} + 2x^{-\frac{3}{2}}\,dx$

$= \frac{4x^{-1}}{-1} + 2.\frac{2}{-1}x^{-\frac{1}{2}} + c$

$= -4x^{-1} - 4x^{-\frac{1}{2}} + c$

13) $\int x\sqrt{x}\,dx$

الحل

نجهز $\int x.x^{\frac{1}{2}}\,dx$

الأسس في حالة الضرب نجمع

$\int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + c$

14) $\int x(x+1)^2\,dx$

الحل

نجهز $= \int x(x+1)(x+1)\,dx$

$= \int (x^2+x)(x+1)\,dx$

$= \int (x^3+x^2+x^2+x)\,dx$

$= \int (x^3+2x^2+x)\,dx$

نكامل $\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c$

$= \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c$

ملاحظة: نستطيع التفكيك بقاعدة فك القوس التربيعي :

$(\text{الاول})^2 + 2.\text{الاول}.\text{الثاني} + (\text{الثاني})^2$

15) $\int \frac{4-x^2}{2+x}\,dx$

الحل

الفرق بين مربعين

تجهيز $\int \frac{(2+x)(2-x)}{(2+x)}\,dx = \int (2-x)\,dx$

نكامل $2x - \frac{x^2}{2} + c$

أسئلة قوة نار وشراااار

1) $\int (x+1)(x-2)(x+6)\,dx$

الحل

نفكك الأقواس:

$$= \int (x^2 - 2x + x - 2)(x+6)\,dx$$

$$= \int (x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x + 6x^2 - 12x + 6x + 12)\,dx$$

نجمع $= \int (x^3 - 5x^2 - 8x - 12)\,dx$

نكامل $\frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} - 12x + c$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 4x^2 - 12x + c$$

2) $\int \frac{(x+3)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

الحل

نفكك

نجهز $\int \frac{(x+3)(x+3)}{\sqrt{x}}\,dx$

$$= \int \frac{x^2 + 3x + 3x + 9}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \int \frac{x^2 + 6x + 9}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

نوزع البسط على المقام

$$= \int \left(\frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{6x}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{9}{x^{\frac{1}{2}}}\right)dx$$

$x^{2-\frac{1}{2}}$ $x^{1-\frac{1}{2}}$

$$\int x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + 9x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

نكامل $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 6.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 9.\frac{2}{1}x^{\frac{1}{2}} + c$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{3}{2}} + 18x^{\frac{1}{2}} + c$$

16) $\int x\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)dx$

الحل

نجهز $\int (x^3 + 2)\,dx$

نكامل $\frac{x^4}{4} + 2x + c$

تمرين أتحقق من فهمي

جد التكاملات الآتية:

a)

$$\int \frac{x^4 - 8x^3}{x^2}\,dx$$

b)

$$\int (3x+2)(x-1)\,dx$$

c)

$$\int x(x^3 - 7)\,dx$$

فك الأقواس

تعلم قاعدة فك القوس التربيعي

$((\text{الأول})^2 + 2 \times \text{الأول} \times \text{الثاني} + (\text{الثاني})^2)$

أو اضرب القوسين ببعض

3) $\int \frac{x^2+2}{\sqrt{x}}dx$

الحل

نجهز $\int \frac{x^2+2}{x^{\frac{1}{2}}}dx$

نوزع البسط على المقام

$$\int\left(\frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}\right)dx$$

$$\int\left(x^{2-\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$\int\left(x^{\frac{3}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2.\frac{2}{1}x^{\frac{1}{2}}+c$$

$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}+c$$

4) $\int\left(\frac{x^3+1}{x^3}\right)^2dx$

الحل

نوزع البسط على المقام قلب الحب الرياضي

$$\int\left(\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)^2dx=\int(1+x^{-3})^2\,dx$$

نفكك الأقواس:

$$\int(1+x^{-3})(1+x^{-3})\,dx$$

$$=\int(1+x^{-3}+x^{-3}+x^{-6})\,dx$$

نجمع: $=\int(1+2x^{-3}+x^{-6})\,dx$

نكامل: $x+\frac{2x^{-2}}{-2}+\frac{x^{-5}}{-5}+c$

$$=x-x^{-2}-\frac{1}{5}x^{-5}+c$$

5)

إذا كان

$$\int\left(\frac{p}{2x^2}+Q\right)dx=\frac{2}{x}+10x+c$$

جد قيمة كل من الثابت Q, P

الحل

$$\int\left(\frac{p}{2x^2}+Q\right)dx$$

نجهز $\int\left(\frac{p}{2}x^{-2}+Q\right)dx$

نكامل $\frac{p}{2}\frac{x^{-1}}{-1}+Qx+c$

$$=-\frac{p}{2}\frac{1}{x}+Qx+c$$

لكن الإجابة على السؤال :

$$\frac{2}{x}+10x+c$$

$$=2\frac{1}{x}+10x+c$$

بالمقارنة :

$$-\frac{p}{2}=\frac{2}{1}\rightarrow -p=4\rightarrow p=-4$$

$$Q=10$$

إرادة المثابرة غالباً ما تكون الفرق بين الفشل، والنجاح .

أتدرب وأحل مسائل

أجد اقتراناً أصلياً لكل من الاقترانات الآتية:

1) $f(x) = x^7$

2) $f(x) = -2x^6$

3) $f(x) = -10$

4) $f(x) = 8x$

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

5) $\int 6\,dx$

6) $\int (7x-5)dx$

7) $\int (3-4x)dx$

8) $\int \frac{10}{\sqrt{x}}dx$

9) $\int 2x^{\frac{3}{2}}dx$

10) $\int (2x^4-5x+10)dx$

11) $(2x^3-2x)dx$

12) $\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt{x^3}\right)dx$

13) $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)dx$

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

14) $\int \frac{4x^3-2}{x^3}dx$

15) $\int \frac{2x+8}{\sqrt{x}}dx$

16) $\int (x-1)^2dx$

17) $\int \frac{x^3+8}{x+2}dx$

18) $\int \sqrt{x}\,(x-1)dx$

19) $\int (2x-3)(3x-1)dx$

مهارات التفكير العيا

20) اكتشف الخطأ: أوجدت رنيم ناتج التكامل

$$\int (2x+1)(x-1)dx$$

وكان الحل على النحو الآتي:

$$\int (2x+1)(x-1)dx = \int (2x+1)dx \times \int (x-1)\,dx$$

$$= (x^2+x)\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) + C$$

اكتشف الخطأ في حل رنيم وأصححه.

تحدٍّ: أجد كل تكامل مما يأتي:

$$21)\ \int \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^2 dx$$

$$22)\ \int (x-1)(x-3)(x+5)dx$$

23) تبرير: إذا كان :

$$\int \left(\frac{P}{2x^2}+Q\right)dx = \frac{2}{x}+10x+C$$

فأجد قيمة كل من الثابت P، والثابت Q مبرراً إجابتي

الدرس الثاني
الشرط الأولي

هي نقطة تعطى في المسألة وتحقق الاقتران الأصلي لإيجاد قيمة (c)

أولاً:

إيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا أعطاك $f'(x)$

$$f(x)=\int f'(x)dx$$

أمثلة

1)جد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان

$$f'(x)=3x^2+4x-3$$

ومرّ مغناه بالنقطة (2,4)

النجاح يعتمد على التحضير، فدون التحضير، يكون الفشل مؤكداً

الحل

$$f(x) = \int f'(x)dx$$

$$f(x) = \int (3x^2 + 4x - 3)dx$$

$$= 3\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - 3x + c$$

$$= x^3 + 2x^2 - 3x + c$$

لإيجاد قيمة c نعوض النقطة (2,4)

$$f(2) = 4$$

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + c$$

$$f(2) = 8 + 8 - 6 + c = 4$$

$$10 + c = 4 \rightarrow c = -6$$

نعوّض قيمة c في الاقتران $f(x)$

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 6$$

2)جد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان

$$f'(x) = 3x - 2$$

ومرّ منحناه بالنقطة (-1,2)

الحل

$$f(x) = \int f'(x)dx$$

$$f(x) = \int (3x - 2)dx$$

$$f(x) = 3\frac{x^2}{2} - 2x + c$$

نعوض النقطة $(-1,2)$

$$f(-1) = \frac{3}{2} + 2 + c = 2$$

$$\rightarrow \frac{7}{2} + c = 2 \rightarrow c = 2 - \frac{7}{2}$$

$$\rightarrow c = \frac{-3}{2}$$

$$f(x) = 3\frac{x^2}{2} - 2x - \frac{3}{2}$$

3)جد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان

$$f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

ومرّ منحناه بالنقطة (4,5)

الحل

$$f(x) = \int f'(x)dx$$

$$f(x) = \int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$$

تجهيز $= \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

$$= \int \left(\frac{x}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

تكامل $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + c$

نعوض بالنقطة (4,5):

$$f(4) = \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} + 2(4)^{\frac{1}{2}} + c = 5$$

$$f(4) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{4}\right)^3 + 2\sqrt{4} + c = 5$$

$$\frac{2}{3}(2)^3 + 2(2) + c = 5$$

$$\frac{2}{3}(8) + 4 + c = 5$$

$$\frac{16}{3} + 4 + c = 5$$

-4 -4

$$\frac{16}{3} + c = 1$$

$-\frac{16}{3}$ $-\frac{16}{3}$

$$c = 1 - \frac{16}{3} \rightarrow c = -\frac{13}{3}$$

توحيد مقامات

$$f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{13}{3}$$

يجب عليك أن تتقبل الفشل، وتعترف به حتى تنتقل إلى النجاح.

4)جد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان
$f'(x)=-x(x+1)$
ومرّ منحناه بالنقطة $(-1,5)$

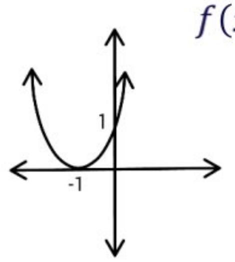
الحل

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$f(x)=\int -x(x+1)dx$$
نجهز $f(x)=\int(-x^2-x)dx$

نكامل $f(x)=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+c$

نعوض النقطة:
$$f(-1)=5$$
$$f(-1)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+c=5$$
$$-\frac{1}{6}+c=5\rightarrow c=\frac{31}{6}$$
$$+\frac{1}{6}\qquad +\frac{1}{6}$$
$$f(x)=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{31}{6}$$

5)يبيّن الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$ حيث:
$f(x)=2x+2$
جد قاعدة الاقتران $f(x)$



الحل

نجد النقطة من الشكل الاقتران يمر بالنقطة (0,1)
$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$f(x)=\int 2x+2\ dx$$
$$f(x)=x^2+2x+c$$
$$f(x)=x^2+2x+c$$
$$f(0)=0+0+c=1\rightarrow c=1$$
$$f(x)=x^2+2x+1$$

تحقق من فهمي

جد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان
$f'(x)=6x^2+5$
ومرّ منحناه بالنقطة (1,9)

ثانياً:
إيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا أعطاك ميل المماس علماً ان:
$$f(x)=\int (\text{ميل المماس})\ dx$$

أمثلة

1)إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو:
$$f'(x)=\sqrt{x}$$
فأجد قاعدة الاقتران $f(x)$ علماً أن منحناه مر بالنقطة (9,25)

الحل

$$f(x)=\int (\text{ميل المماس})\ dx$$
$$f(x)=\int \sqrt{x}\ dx$$
$$f(x)=\int x^{\frac{1}{2}}\ dx$$
$$f(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$$

النجاح هو تركيز جميع قوى كيانك على ما تتحرق رغبةً في تحقيقه

عوّض بالنقطة (9,25):

$$f(9)=25$$
$$f(9)=\frac{2}{3}(9)^{\frac{3}{2}}+c=25$$
$$\frac{2}{3}\left(\sqrt{9}\right)^3+c=25$$
$$\frac{2}{3}(3)^3+c=25$$
$$\frac{2}{3}(27)+c=25$$
$$18+c=25$$
$$-18 \qquad -18$$
$$c=7$$
$$f(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+7$$

2)إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x^2}$$

فأجد قاعدة العلاقة y علماً أن منحناها يمرّ بالنقطة (2,4)

الحل

$$f(x)=\int(\text{ميل المماس})\,dx$$
$$f(x)=\int\frac{2}{x^2}\,dx$$
$$\text{نجهز}\rightarrow\ f(x)=\int 2x^{-2}\,dx$$
$$\text{نكامل} f(x)=\frac{2x^{-1}}{-1}+c$$
$$f(x)=-2x^{-1}+c$$
$$f(x)=-\frac{2}{x}+c$$

نعوض النقطة (2,4):

$$f(2)=4$$
$$f(2)=-\frac{2}{(2)}+c=4$$
$$=-1+c=4$$
$$\rightarrow c=4+1$$
$$\rightarrow c=5$$
$$f(x)=-\frac{2}{x}+5$$

3)إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو :

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-12x+8$$

ومر منحناها بنقطة الأصل جد الإحداثي x لجميع نقاط تقاطع منحنى العلاقة مع المحورx

الحل

نجد أولاً $f(x)$

$$f(x)=\int(\text{ميلالمماس})\,dx$$
$$f(x)=\int(3x^2-12x+8)\,dx$$
$$f(x)=x^3-6x^2+8x+c$$

نقطة الأصل هي (0,0)

$$f(0)=0-0+0+c=0$$
$$\rightarrow c=0$$
$$f(x)=x^3-6x^2+8x$$

الآن عند تقاطع الاقتران مع المحورx معناها $y=0$

$$y=f(x)\rightarrow f(x)=0$$
$$x^3-6x^2+8x=0$$
$$x(x^2-6x+8)=0$$
$$x(x-4)(x-2)=0$$
$$x=0(x=4)(x=2)$$

الرجل الناجح هو الذي يظل يبحث عن عمل، وإن وجد وظيفة.

ثالثاً:

إيجاد اقتران التكلفة: $c(x)$ واقتران الايراد: $R(x)$ حيث:

التكلفة — $C(x) = \int C'(x)dx$ — التكلفة الحدية

الايراد — $R(x) = \int R'(x)dx$ — الايراد الحدي

1) يمثل الاقتران :

$$C'(x) = 3x^2 - 60x + 400$$

التكلفة الحدية بالدينار لكل طابعة ملوّنة تنتجها إحدى الشركات حيث x عدد الطابعات المنتجة

و c(x) تكلفة انتاج x طابعة بالدينار

جد اقتران التكلفة c(x) علماً أن تكلفة انتاج طابعة واحدة هي: $583\ jd$

الحل

$$C(x) = \int C'(x)\,dx$$

$$c(x) = \int (3x^2 - 60x + 400)\,dx$$

$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + c$$

$$C(1) = 583$$

$$C(1) = 1 - 30 + 400 + c = 583$$

$$\rightarrow c = 212$$

$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 212$$

1) يمثل الاقتران :

$$R'(x) = x^2 - 3$$

الإيراد الحدّي بالدينار لكل قطعة تباع من منتجات إحدى الشركات حيث x عدد القطع المبيعة و $R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار

جد اقتران الإيراد $R(x)$

علماً أن $R(0) = 0$

الحل

$$R(x) = \int R'(x)\,dx$$

$$R(x) = \int (x^2 - 3)\,dx$$

$$R(x) = \frac{x^3}{3} - 3x + c$$

نعوّض: $(0,0)$

$$R(0) = 0$$

$$R(0) = 0 - 0 + c = 0$$

$$\rightarrow c = 0$$

$$R(x) = \frac{x^3}{3} - 3x + 0$$

تحقق من فهمي

يمثل الاقتران:

$$C'(x) = 0.3x^2 + 2x$$

التكلفة الحدية (بالدينار) لكل قطعة تنتج في إحدى الشركات حيث x عدد القطع المنتجة و C(x) تكلفة انتاج x قطعة بالدينار.

جد اقتران التكلفة C(x) علماً أن تكلفة انتاج 10 قطع هي: $JD\ 2200$

$$C(x) = 0.1x^3 + x^2 + 2000$$

فقط أولئك الذين يجرؤون على الفشل، هم من يصلون للنجاح في النهاية.

رابعاً:

الحركة في مسار مستقيم

إيجاد موقع الجسيم $S(t)$.

تذكر $S \to v \to a$

$$S(t) = \int v(t)\, dt$$

إذا ما أعطاك v(t) طلعها بالقانون:

$$v(t) = \int a(t)\, dt$$

أمثلة

1) يتحرك جسيم في مسار مستقيم وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران $v(t) = t + 2$

حيث t الزمن بالثواني وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم 11m. فأجد موقع الجسيم بعد 8 ثوانٍ من بدء الحركة.

الحل

الموقع الابتدائي = 11

معناها $S(0) = 11$

المطلوب S(8)

لازم انطلع S(t) ونعوض 8.

$$S(t) = \int v(t)\, dt$$

$$\to S(t) = \int (t+2)\, dt$$

$$S(t) = \frac{t^2}{2} + 2t + c$$

نعوّض $S(0) = 11$

$$S(0) = 0 + 0 + c = 11$$

$$\to C = 11$$

$$S(t) = \frac{t^2}{2} + 2t + 11$$

الآن نجد S(8)

$$S(8) = \frac{(8)^2}{2} + 2(8) + 11$$

$$= 32 + 16 + 11 = 59\, m$$

2) يتحرك جسيم في مسار مستقيم وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:

$$v(t) = 3t^2 - 12t + 11$$

إذا بدأ الجسم الحركة من نقطة الأصل فأجد موقعه بعد ثانيتين من بدء الحركة.

الحل

$$S(t) = \int v(t)\, dt$$

$$S(t) = \int (3t^2 - 12t + 11)\, dt$$

$$\to S(t) = t^3 - 6t^2 + 11t + c$$

نقطة الأصل (0,0)

$$f(0) = 0 \to C = 0$$

$$S(t) = t^3 - 6t^2 + 11t + 0$$

نعوض 2

$$S(2) = 8 - 24 + 22$$
$$= -16 + 22 = 6m$$

3) يتحرك جسيم في مسار مستقيم ويعطى تسارعه بالاقتران

$$a(t) = 6t$$

حيث t الزمن بالثواني

ag تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم هو 4m وكانت سرعته المتجهة هي 1m/s بعد ثانية واحدة من بدء حركته جد موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة.

الحل

الموقع الابتدائي = 4

$$S(0) = 4$$
$$v(1) = 1$$

المطلوب: $S(2)$

$$S(t) = \int v(t)\ dt$$

لكن السؤال ما أعطانا v(t) بنروح بنطلعها بالقانون:

$$v(t) = \int a(t)\ dt$$
$$v(t) = \int 6t\ dt$$
$$v(t) = 3t^2 + c$$
$$v(1) = 1 \ \rightarrow 3 + c = 1$$
$$C = -2$$

$$v(t) = 3t^2 - 2$$
$$S(t) = \int v(t)\ dt$$
$$S(t) = \int (3t^2 - 2)dt$$
$$S(t) = t^3 - 2t + c$$
$$\rightarrow S(0) = 4$$
$$0 - 0 + c = 4 \rightarrow c = 4$$
$$S(t) = t^3 - 2t + 4$$
$$S(2) = 8 - 4 + 4$$
$$= 8\ m$$

4) يتحرك جسيم في مسار مستقيم ويعطى تسارعه بالاقتران:

$$a(t) = 6t - 30$$

حيث t الزمن بالثواني و ag التسارع بالمتر لكل ثانية تربيع إذا بدأ الجسم حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة مقدارها 72 m/s فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة.

الحل

$$S(0) = 0$$
$$v(0) = 72$$
$$S(t) = \int v(t)\ dt$$

نجد v(t)

$$v(t) = \int a(t)\,dt$$
$$v(t) = \int (6t - 30)\ dt$$

الإنجاز الحقيقي في هذا العالم المادي الباهت ،هو أن تتمسك بنور الله حتى تلقاه

$$v(t) = 3t^2 - 30t + c_1$$
$$v(0) = 72 \rightarrow c_1 = 72$$
$$v(t) = 3t^2 - 30t + 72$$

الآن $S(t) = \int v(t)\, dt$

$$S(t) = \int (3t^2 - 30t + 72)dt$$
$$S(t) = t^3 - 15t^2 + 72t + c_2$$
$$S(0) = 0 \ \rightarrow \ c_2 = 0$$
$$S(t) = t^3 - 15t^2 + 72t$$
$$S(3) = 27 - 15(9) + 72(3)$$
$$= 27 - 135 + 216 = 108$$

تحقق من فهمي

1) يتحرك جسيم في مسار مستقيم وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:

$$v(t) = 36t - 3t^2$$

حيث t الزمن بالثواني ، وv سرعته بالمتر لكل ثانية إذا بدأ الجسم حركته من نقطة الأصل جد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة.

2) يتحرك جسيم في مسار مستقيم ويعطى تسارعه بالاقتران:

$$a(t) = 4t - 4$$

إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة مقدارها 5 m/s جد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة.

أسئلة عامة

دائماً إذا أعطاك المشتقة وطلب الاقتران الأصلي.

← المشتقة $\int$ = الاقتران

أمثلة

1) عند نفخ بالون كروي الشكل يصبح نصف قطره y cm بعد t ثانية إذا كان:

$$\frac{dy}{dt} = 2t^{-\frac{2}{3}}$$

وكان نصف قطر البالون بعد 8 ثوانٍ من بدء نفخه 30 cm

جد: a) قاعدة العلاقة y بدلالة t.

b) نصف قطر البالون بعد 27 ثانية من بدء نفخه.

الحل

a) طلب y

أعطانا المشتقة $\frac{dy}{dt}$

لإيجاد y نكامل $\frac{dy}{dt}$

$$y = \int 2t^{-\frac{2}{3}}\, dt$$
$$y = 2.3t^{\frac{1}{3}} + c$$
$$y = 6t^{\frac{1}{3}} + c$$
$$y = 6\sqrt[3]{t} + c$$

بإمكان عقلك أن يدهشك إذا استطعت أن تقول لنفسك يمكنني تحقيق ذلك، يمكنني عمل ذلك

أعطانا $y(8)=30$

$$\to 6\sqrt[3]{8}+c=30$$

$$6.2+c=30$$

$$12+c=30$$

$$c=18$$

$$y=6\sqrt[3]{t}+18$$

b) نصف القطر بعد 27 ثانية طلب قيمة yبعد t=27

نعوض $\to y=6\sqrt[3]{27}+18$

$$=6.3+18$$

$$=36\,cm$$

2) في دراسة تناولت نوعاً معيناً من الأشجار تبين أن ارتفاع هذه الأشجار يتغير بمعدل:

$$h'(t)=0.4t^{\frac{2}{3}}+\sqrt{t}$$

حيث h(t) ارتفاع الشجرة بالأقدام وt عدد السنوات منذ لحظة زراعتها.

إذا كان ارتفاع إحدى هذه الأشجار عند زراعتها هو:

$2ft$ فهو $h(t)$

الحل

الارتفاع عند الزراعة 2 معناها $h(0)=2$

$$h(t)=\int h'(t)\ dt$$

$$h(t)=\int (0.4t^{\frac{2}{3}}+\sqrt{t})$$

$$h(t)=\int \left(0.4t^{\frac{2}{3}}+t^{\frac{1}{2}}\right)dt$$

$$h(t)=0.4.\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+c$$

نعوض $h(0)=2$ لإيجاد c

$$c=2$$

$$h(t)=\frac{1.2}{5}t^{\frac{5}{3}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+2$$

أسئلة قوة

1) تعطى مشتقة الاقتران $f(x)$ بالقاعدة:

$$f'(x)=ax+b$$

حيث a وb ثابتان إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$عند النقطة (2,4) هو 8.

وقطع منحنى الاقتران المحور y عند النقطة (0,10).

جد قاعدة الاقتران $f(x)$

الحل

ركز معي:

الميل عند النقطة (2,4) هو 8 معناها:

$$f(x)=4$$

لأنه الميل هو المشتقة $\to$ $f'(x)=8$

قطع y عند(0,10) معناها $f(0)=10$

نعوض في$f'(x)$ $\leftarrow$ $f'(2)=8$

معادلة 1) $2a+b=8\,.....$

$f'(x)$ لإيجاد$f(x)$

$$f(x)=\int f'(x)\ dx$$

$$f(x)=\int ax+b\ dx$$

$$f(x)=\frac{ax^2}{2}+bx+c$$

نعوض $f(0)=10$

$$0+0+c=10$$

$$c=10$$

$$f(x)=\frac{ax^2}{2}+bx+10$$

نعوّض $f(2)=4$

$$2a+2b+10=4$$

10-   10-

$$2a+2b=-6$$

$a+b=-3$ .....(2 معادلة

نطرح معادلة(2) من(1):

$$2a+b=8$$

$$a+b=-3$$

$$a=11$$

$$a+b=-3$$

$$11+b=-3$$

-11 -11

$$\rightarrow b=-14$$

$$f(x)=\frac{ax^2}{2}+bx+c$$

$$\rightarrow f(x)=\frac{11}{2}x^2-14x+10$$

2) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو:

$$(4-\frac{100}{x^2})$$

وكان للاقتران نقطة حرجة عند النقطة (a,10) حيث a>0 جد قاعدة الاقتران.

الحل

$$f'(x)=4-\frac{100}{x^2}$$

معنى نقطة حرجة عند $(a,10)$:

$$f(a)=10$$

$$f'(a)=10$$

احفظ

نقطة حرجة عند (a,b) معناها:

$$f(a)=b$$

$$f'(a)=0$$

نعوّض $f'(a)=0$

$$f'(x)=4-\frac{100}{x^2}$$

$$4-\frac{100}{a^2}=0\rightarrow 4=\frac{100}{a^2}$$

$$\rightarrow\frac{4}{4}a^2=\frac{100}{4}\rightarrow a^2=25$$

جذر الطرفين $a=5$

$$f(a)=10$$

$$f(5)=10$$

الآن نكامل $f'(x)$ لإيجاد $f(x)$

$$f(x)=\int 4-\frac{100}{x^2}\,dx$$

نجهز$f(x)=\int(4-100x^{-2})dx$

$$f(x)=4x-\frac{100x^{-1}}{-1}+c$$

$$f(x)=4x-\frac{100}{x}+c$$

0785351625

نعوّض

$$f(5)=10$$

$$f(5)=20+\frac{100}{5}+c=10$$

$$20+20+c=10$$

$$40+c=10$$

$$-40 \qquad -40$$

$$c=-30$$

$$f(x)=4x+\frac{100}{x}-30$$

أتدرب وأحل مسائل

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمر بها منحني $y=f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

1) $f'(x)=x-3\,;(2,9)$

2) $f'(x)=x^2-4;(0,7)$

3) $f'(x)=6x^2-4x;(1,9)$

4) $f'(x)=\sqrt{x}\frac{1}{4}x^2;(4,11)$

5) $f'(x)=(x+2)^2\,;(1,7)$

6) $f'(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}-x\,;(4,0)$

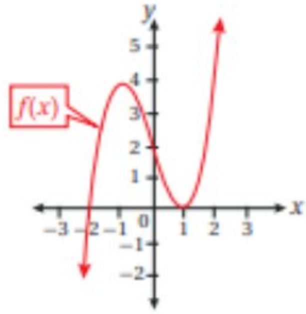
7) إذا كان ميل المماس لمنحني العلاقة y هو:

$$\frac{dx}{dy}=0.4x+3$$

فأجد قاعدة العلاقة y، علماً بأن منحناها يمر بالنقطة $(0,5)$.

8) إذا كان ميل المماس لمنحني الاقتران $f(x)$هو: $f'(x)=\frac{x^2+10}{x^2}$، فأجد قاعدة الاقتران $f(x)$، علماً بأن منحناه يمر بالنقطة $(5,2)$.

9) يبين الشكل المجاور منحني الاقتران $f(x)$، حيث $f'(x)=3x^2-3$. أجد قاعدة الاقتران $f(x)$.



بالون: عند نفخ بالون كروي الشكل يصبح نصف قطره y سنتيمتراً بعد tثانية. إذا كان

$$\frac{dy}{dt}=4t^{-\frac{2}{3}}, t>0$$

وكان نصف قطر البالون بعد 8 ثوان من نفخه $30\ cm$، فأجد كلا مما يأتي:

10) قاعدة العلاقة y بدلالة t.

11) نصف قطر البالون بعد 27 ثانية من بدء نفخه.

12) أشجار: في دراسة تناولت نوعاً معيناً من الأشجار، تبين أن ارتاع هذه الأشجار يتغير بمعدل يمكن نمذجته بالقتران:

$$h'(x)=0.2t^{\frac{2}{3}}+\sqrt{t}$$

حيث $h(t)$ ارتفاع الشجرة بالأقدام، وt عدد السنوات منذ زراعة الشجرة. إذا كان ارتفاع احدى هذه الأشجار عند زراعتها هو 12 ft، فأجد

$h(t)$

13) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران : $v(t)=2t+3$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل، فاجد موقعه بعد 3 ثوان من بدء الحركة.

14) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه: $a(t)=t^2$، حيث t الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع، إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة مقدارها $2m/s$ ، فأجد موقعه بعد ثانيتين من بدء حركته.

مهارات التفكير العيا

16) تعطى مشتقة الاقتران $f(x)$ بالقاعدة:

$$f'(x)=ax+b$$

حيث aوb .إذا كان ميل الماس لمنحني الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(-2,8)$ هو7. وقطع منحني الاقتران المحور y عند النقطة $(0,18)$، فأجد قاعدة هذا الاقتران مبرراً اجابتي.

17) إذا كان ميل المماس لمنحني الاقتارن $f(x)$ هو: $(4-\frac{100}{x^2})$، وكان للاقتران نقطة حرجة عند النقطة $(a,10)$ ، حيث : $a>0$، فأجد قاعدة هذا الاقتران.

أحلامنا التي لم تحدث في الحياة ربما كانت كوابيساً مزعجة.

الدرس الثالث التكامل المحدود

عرفنا أنه $\int f(x)\ dx$ هو رمز التكامل غير محدود.

بنسمي $\int_a^b f(x)dx$ التكامل المحدود

حيث:

a: الحد السفلي للتكامل.

b: الحد العلوي للتكامل.

إذا كان $f(x)$ هو اقتران أصلي للاقتران $f(x)$ فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = f(x)|_a^b$$

$$= f(b) - f(a)$$

بعد التكامل نعوّض الحد العلوي - (تعويض الحد السفلي).

أمثلة

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

1) $\int_0^1 (2x-5)dx$

الحل

$$= x^2 - 5x|_0^1$$

$$= \left((1)^2 - 5(1)\right) - \left((0)^2 - 5(0)\right)$$

تعويض الحد الأعلى تعويض الحد السفلي

$$= -4$$

2) $\int_{-4}^3 x\,(4-3x)dx$

الحل

نجهز: $\int_{-4}^3 (4x - 3x^2)\,dx$

نكامل $= (2x^2 - x^3)|_{-4}^3$

$$= (2(3)^2 - (3)^3) - (2(-4)^2 - (-4)^3)$$

$$= (18 - 27) - (32 - \ -64)$$

$$= -9 - 96 = -105$$

3) $\int_1^5 10x^{-2}dx$

الحل

$$= -10x^{-1}|_1^5$$

$$= -\frac{10}{x}\Big|_1^5$$

$$= \left(-\frac{10}{5}\right) - \left(-\frac{10}{1}\right) = -2 + 10 = 8$$

الهدف النهائي للحياة هو الفعل وليس العلم، فالعلم بلاعمل لا يساوي شيئاً، نحن نتعلم لكي نعمل

$$4)\int_0^2 (2x^3-4x+5)dx$$

الحل

$$=\frac{2x^4}{4}-\frac{4x^2}{2}+5x\Big|_0^2$$

$$=\frac{x^4}{2}-2x^2+5x\Big|_0^2$$

$$=(8-8+10)-(0)$$

$$=10$$

$$5)\int_1^4 \frac{x^3+2x^2}{\sqrt{x}}\,d$$

الحل

$$\text{تجهيز}=\int_1^4 \frac{x^3}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{2x^2}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\int_1^4 x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{نكامل}=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+2.\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$$

$$=\frac{2}{7}\left(\sqrt{x}\right)^7+\frac{4}{5}\left(\sqrt{x}\right)^5\Big|_1^4$$

$$=\left(\frac{2}{7}\left(\sqrt{4}\right)^7+\frac{4}{5}\left(\sqrt{4}\right)^5\right)-\left(\frac{2}{7}(1)+\frac{4}{5}(1)\right)$$

$$=\left(\frac{2}{7}(128)+\frac{4}{5}(32)\right)-\left(\frac{2}{7}+\frac{4}{5}\right)$$

$$=\left(\frac{256}{7}+\frac{128}{5}\right)-\left(\frac{2}{7}+\frac{4}{5}\right)$$

$$=\frac{256}{7}+\frac{128}{5}-\frac{2}{7}-\frac{4}{5}$$

$$=\frac{254}{7}+\frac{124}{5}=\frac{1270+868}{35}=\frac{2138}{35}$$

$$6)\int_3^6 \left(x-\frac{3}{x}\right)^2 dx$$

خرافي

فك الأقواس

تعلم قاعدة فك القوس التربيعي

((الأول)^2 + 2 × الأول × الثاني + (الثاني)^2)

أو اضرب القوسين ببعض

الحل

$$\text{نجهز:}\int_3^6 \left(x^2-6+\frac{9}{x^2}\right)dx$$

$$\text{كما أن نجهز}=\int_3^6 \left(x^2-6+9x^{-2}\right)dx$$

$$\text{نكامل}=\frac{x^3}{3}-6x-9x^{-1}\Big|_3^6$$

$$\text{نعوّض}=\left(\frac{216}{3}-6(6)-\frac{9}{6}\right)$$

$$-\left(\frac{27}{3}-6(3)-\frac{9}{3}\right)$$

$$=\left(72-36-\frac{3}{2}\right)-(9-18-3)$$

$$=\left(36-\frac{3}{2}\right)-(-12)=48-\frac{3}{2}=\frac{96-3}{2}$$

$$=\frac{93}{2}$$

إن لم يكن لديك هدف فاجعل هدفك الأول إيجاد واحد

تحقق من فهمي

$$a) \int_0^2 (2x-4)dx$$

ج: -4

$$b) \int_1^4 (8x-\sqrt{x})$$

ج: $60-\frac{14}{3}=\frac{166}{3}$

$$c) \int_{-1}^2 (1-x)(1+3x)dx$$

ج: 15

مجاهيل التكامل المحدود

أمثلة

1) إذا كان $\int_1^k \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 3$

جد قيمة الثابت k

الحل

نكامل ثم نعوض:

$$\text{تجهيز} = \int_1^k x^{-\frac{1}{2}}\, dx = 3$$

$$2x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^k = 3$$

$$2\sqrt{x}\Big|_1^k = 3$$

$$\text{نعوّض } 2\sqrt{k}-2=3$$

$$\frac{2}{2}\sqrt{k}=\frac{5}{2}$$

$$\sqrt{k}=\frac{5}{2}$$

$$\text{نربع الطرفين } \rightarrow k=\frac{25}{4}$$

2) إذا كان : $\int_2^3 (x^2-a)dx = 5$

جد قيمة الثابت a.

الحل

$$\frac{x^3}{3}-ax\Big|_2^3 = 5$$

$$\text{نعوّض } (9-3a)-\left(\frac{8}{3}-2a\right)=5$$

$$9-3a-\frac{8}{3}+2a=5$$

$$\left(9-a-\frac{8}{3}=5\right)\times 3$$

$$27-3a-8=15$$

$$19-3a=15$$

$$-\frac{3a}{-3}=-\frac{4}{-3}$$

$$a=\frac{4}{3}$$

تحقق من فهمي

إذا كان $\int_0^k 6x^2\,dx=2$

جد قيمة الثابت k

خصائص التكامل المحدود

إذا كان $g(x)$ و$f(x)$ قوانين متصلين على الفترة $[a,b]$ وكان k ثابتاً فإن:

$$1)\ \int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$$

(تكامل الاقتران المضروب في ثابت)

$$2)\ \int_a^b \big(f(x)\pm g(x)\big)dx$$

$$=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$$

تكامل المجموع أو الفرق

ملاحظة:
خاصية (1)و(2) نفس خصائص التكامل الغير محدود

$$3)\ \int_a^a f(x)\,dx=0$$

التكامل عند نفس النقطة=0

مثال على الخاصية:

$$\rightarrow\int_2^2 x^2dx=0$$

من الحقائق الثابتة أنك تستطيع أن تنجح بسرعة وبأفضل طريقة، عندما تساعد الآخرين على النجاح

4) $\int_a^b f(x)\,dx$

$$= -\int_b^a f(x)dx$$

التبديل بين حدّي التكامل

مثال 1) على الخاصية:

إذا كان: $\int_2^5 f(x)dx = 7$

$$\rightarrow \text{فإن} \int_5^2 f(x)dx = -7$$

مثال 2) إذا كان: $\int_3^4 2f(x)dx = 8$

جد: $\int_4^3 f(x)dx$

الحل

انتبه أن هناك مع المعطى لذا نجهز السؤال

$$\int_3^4 2f(x)dx = 8$$

$$\frac{2}{2}\int_3^4 f(x)\,dx = \frac{8}{2}$$

قسمة (2)

$$\int_3^4 f(x)dx = 4$$

$$\int_4^3 f(x)dx = -4$$

$$\int_4^3 f(x)dx = -4$$

3) إذا كان:

$$\int_1^5 (f(x)+2)dx = 12$$

جد $\int_5^1 f(x)dx$

الحل

نجهز المعطى:

لازم $\int_1^5 f(x)dx$ تكون لحالها.

$$\text{نوزع التكامل} \rightarrow \int_1^5 (f(x)+2)dx$$

$$= \int_1^5 f(x)dx + \int_1^5 2dx = 12$$

$$\int_1^5 f(x)dx + 2x|_1^5 = 12$$

$$\int_1^5 f(x)dx + ((10)-(2)) = 12$$

$$\int_1^5 f(x)dx + 8 = 12$$

$$\rightarrow \int_1^5 f(x)dx = 4$$

$$\int_5^1 f(x)dx = -4$$

قاعدة سريعة لتكامل الأرقام

$$\int_a^b kdx = (b-a)x$$

$$\text{مثال} \rightarrow \int_1^3 5dx = (3-1)5 = 10$$

$$\text{مثال} \rightarrow \int_2^7 3dx = (7-2)3 = 15$$

خاصية 5

تجزئة التكامل

$$\int_a^b f(x)dx$$
$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ليس شرط أن تكون c بين a وb.

تستعمل هذه الخاصية إذا كان المطلوب غير معطى في السؤال.

أمثلة على الخاصية:

1) إذا كان: $\int_1^3 f(x)dx = 7, \int_3^5 f(x)dx = 3$

جد $\int_1^5 f(x)dx$

الحل

لاحظ أن المطلوب ليس ضمن المعطيات

$$\int_1^5 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx$$
$$= 7 + 3 = 10$$

2) إذا كان: $\int_1^4 f(x)dx = -2$ ، $\int_5^4 f(x)dx = -6$

جد: $\int_1^5 f(x)dx$

الحل

$$\int_1^5 f(x)dx = \int_1^4 f(x)dx + \int_4^5 f(x)dx$$
$$= -2 + 6 = 4$$

3) إذا كان: $\int_2^3 f(x)dx = 6$ ، $\int_6^3 f(x)dx = 2$

جد: $\int_2^6 (f(x) - 5)dx$

الحل

نوزع التكامل على المطلوب:

$$\int_2^6 f(x)\,dx - \int_2^6 5dx$$
$$= (\int_2^3 f(x)dx + \int_3^6 f(x)dx - ((6-2)5)$$
$$= (6 + -2) - 20$$
$$4 - 20 = -16$$

أمثلة شاملة لجميع الخصائص

ركّز

1) إذا كان:

$$\int_5^7 f(x)dx = 3$$
$$\int_0^5 g(x)dx = -4$$
$$\int_0^5 f(x)dx = 10$$

جد قيمة كل مما يأتي:

$$a)\ \int_0^5 (4f(x) + g(x))dx$$

الحل

$$= 4\int_0^5 f(x)dx + \int_0^5 g(x)dx$$

نعوّض

$$= 4(10) + (-4) = 36$$

$b)\ \int_{5}^{0} 5g(x)dx$

الحل

$$5\int_{5}^{0} g(x)dx$$
$$5\times 4=20$$

$c)\ \int_{0}^{7} f(x)dx$

الحل

خاصية تجزئة التكامل

$$\int_{0}^{7} f(x)dx=\int_{0}^{5} f(x)dx+\int_{5}^{7} f(x)dx$$
$$=10+3=13$$

2) إذا كان:

$$\int_{-3}^{2} f(x)dx=5$$
$$\int_{-3}^{1} f(x)dx=4$$
$$\int_{-3}^{2} g(x)dx=-2$$

جد قيمة كل مما يلي:

$a)\ \int_{1}^{2}(f(x)-5)dx$

الحل

$$\int_{1}^{2} f(x)dx-\int_{1}^{2} 5\,dx$$
$$=(\int_{1}^{-3} f(x)dx+\int_{-3}^{2} f(x)dx-((2-1).5)$$
$$=(-4+5)-(5)$$
$$=1-5=-4$$

$b)\ \int_{2}^{2} f(x)\,dx$

الحل

$$\int_{2}^{2} f(x)dx=0$$

$c)\ \int_{-3}^{2}(-2f(x)+5\,g(x))\,dx$

الحل

$$-2\int_{-3}^{2} f(x)dx+5\int_{-3}^{2} g(x)dx$$
$$=-2(5)+5(-2)$$
$$=-10+\ -10=-20$$

$d)\ \int_{2}^{-3}(g(x)+2x)dx$

الحل

$$\int_{2}^{-3} g(x)dx+\int_{2}^{-3} 2xdx$$
$$=2+x^2|_{2}^{-3}$$
$$=2+((9)-(4))$$
$$=2+5=7$$

$e)\ \int_{2}^{-3}(f(x)+g(x))dx$

الحل

$$=\int_{2}^{-3} f(x)\,dx+\int_{2}^{-3} g(x)dx$$
$$=-5+2=-3$$

$f)\ \int_{-3}^{2}(4f(x)-3g(x))dx$

الحل

$$4\int_{-3}^{2} f(x)dx-3\int_{-3}^{2} g(x)dx$$
$$=4(5)-3(-2)$$
$$20+6=26$$

تحقق من فهمي

إذا كان:

$$\int_{-1}^{1} h(x)dx = 7$$

$$\int_{4}^{1} f(x)dx = 2$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 5$$

جد قيمة كل مما يأتي:

$a)\ \int_{-1}^{1}(f(x) + 3h(x))dx$

$b)\ \int_{-1}^{4} f(x)dx$

$c)\ \int_{1}^{-1} 4h(x)dx$

ج:

$a)26$

$b)3$

$c) - 28$

تكاملات الاقترانات المتشعبة

نكامل الاقترانات المتشعبة بخاصية تجزئة التكامل إذا وقعت نقطة التشعب بين حدود التكامل.

أمثلة

1) إذا كان:

$$f(x) = \begin{cases} 12\,, x < 2 \\ 3x^2, x \geq 2 \end{cases}$$

جد قيمة $\int_1^4 f(x)dx$

الحل

لاحظ أن 2 يقع بين (1) و (4)

$$\int_{1}^{4} f(x)dx =$$

$$= \int_{1}^{2} 12dx + \int_{2}^{4} 3x^2\,dx$$

$$= (2-1)12 + x^3|_2^4$$

$$= 12 + ((64) - (8))$$

$$= 68$$

من عمله النجاح ليس عدم فعل الأخطاء، النجاح هو عدم تكرار الأخطاء

2) إذا كان:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \ , x<2 \\ 8-x \ , x\geq 2 \end{cases}$$

جد قيمة $\int_{-3}^{6} f(x)dx$

الحل

لاحظ أن 2 يقع ببين (-3) و (6).

$$\int_{-3}^{6} f(x)dx =$$

$$\int_{-3}^{2} x^2\,dx + \int_{2}^{6}(8-x)dx$$

$$=\frac{x^3}{3}\Big|_{-3}^{2} + \left(8x-\frac{x^2}{2}\Big|_{2}^{6}\right)$$

$$=\left(\frac{8}{3}-\frac{-27}{3}\right)+\left((48-18)-(16-2)\right)$$

$$=\left(\frac{8}{3}+\frac{27}{3}\right)+(30-14)$$

$=\dfrac{35}{3}+16$ توحيد مقامات

$$=\frac{35+48}{3}=\frac{83}{3}$$

3) إذا كان:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \ , x<2 \\ 8-x \ , x\geq 2 \end{cases}$$

جد قيمة: 1) $\int_{0}^{1} f(x)dx$

الحل

لاحظ أن 2 لا يقع بين (0) و (1) لذلك لا داعي لتجزئة التكامل.

لأن حدود التكامل أقل من 2 نأخذ قاعدتها $x<2$ فقط..

$$\int_{0}^{1} f(x)dx=\int_{0}^{1} x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$$

4) إذا كان:

$$f(x)=\begin{cases} 1+x \ , x<1 \\ 2x, x\geq 1 \end{cases}$$

جد: $\int_{1}^{3} f(x)dx$

الحل

(1) لا تقع بين (1) و (3) نأخذ القاعدة الثانية فقط ولا نجزء لأن الفترة أكبر من 1.

$$\int_{1}^{3} f(x)dx=\int_{1}^{3} 2x\,dx$$

$$=x^2|_1^3=9-1=8$$

تحقق من فهمي

إذا كان:

$$f(x)=\begin{cases} 1+x \ , x<1 \\ 2x \ , x\geq 1 \end{cases}$$

جد قيمة $\int_{-2}^{2} f(x)dx$

ج: $\dfrac{3}{2}+3=\dfrac{9}{2}$

تكامل اقتران القيمة المطلقة

نعيد تعريف اقتران
القيمة المطلقة $|\square|$
قبل التكامل

أمثلة

1) إذا كان $f(x) = |x-1|$ جد قيمة
$\int_0^5 f(x)\,dx$

الحل

نعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة

الخطوات :

1) نجعل ماداخل القيمة المطلقة
يساوي صفر و نجد قيمة x

$$x - 1_{+1} = 0_{+1} \rightarrow x = 1$$

2) نضع خط الأعداد وندرس الإشارة

$1-x$ $x-1$

$- - -$ $+++$

1

3) نكتب اقتران متشعب

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & , x < 1 \\ x-1 & , x \geq 1 \end{cases}$$

الأن نجد التكامل لاقتران متشعب زي ماتعلمنا

$$\int_0^5 f(x)\,dx =$$

$$\int_0^5 (1-x)dx + \int_1^5 (x-1)\,dx$$

$$\left(x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right) + \left(\frac{x^2}{2} - x\Big|_1^5\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\left(\frac{25}{2} - 5\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\left(\frac{15}{2}\right) - \left(\frac{-1}{2}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{15}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{16}{2} = \frac{17}{2}$$

2) جد

$$\int_{-3}^{4} |x|\,dx$$

الحل

نعيد تعريف $|x|$, $x = 0$

$-x$ x

$- - -$ $+++$

0

$$f(x) = \begin{cases} -x \ , & x \leq 0 \\ x \ , & x > 0 \end{cases}$$

$$\int_{-3}^{4} f(x)\,dx$$

$$\int_{-3}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{4} x\ dx$$

$$= \frac{-x^2}{2}\Big|_{-3}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{4}$$

$$= \left((0) - \left(\frac{-9}{2}\right)\right) + \left(\left(\frac{16}{2}\right) - (0)\right)$$

$$= \frac{+9}{2} + \frac{16}{2} = \frac{25}{2}$$

3) جد :

$$\int_0^7 |2x-1|\,dx$$

الحل

نعيد تعريف $|2x-1|$

$2x-1_{+1}=0_{+1} \rightarrow 2x=1$

$x=\frac{1}{2}$

$1-2x$ $2x-1$

$---$ $+++$

$\frac{1}{2}$

$$f(x)=\begin{cases}1-2x, & x\le \frac{1}{2}\\ 2x-1, & x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\int_0^7 f(x)\,dx=$$

$$=\int_0^7 (1-2x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^7 (2x-1)\,dx$$

$$=x-x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}}+x^2-x\Big|_{\frac{1}{2}}^{7}$$

$$\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)-(0)\right)+\left((49)-(7)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)+\left(42-\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{4}+42+\frac{1}{4}=\frac{85}{2}$$

4) جد

$$\int_0^5 (|x+3|-5)\,dx$$

الحل

$$\int_0^5 |x+3|dx-\int_0^5 5\,dx$$

إعادة تعريف

$x+3=0\rightarrow x=3$ $(5-0).5=25$

$-x-3$ $x+3$

$---$ $+++$

-3

$$f(x)=\begin{cases}-x-3, & x\le -3\\ x+3, & x>-3\end{cases}$$

لاحظ أن -3 لا تقع بين 0 و 5

$$\int_0^5 x+3\ dx-25$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+3x\Big|_0^5\right)-25$$

$$=\left(\left(\frac{25}{2}+15\right)-(0)\right)-25$$

$$=\frac{25}{2}+15-25$$

$$=\frac{25}{2}-10=\frac{5}{2}$$

تحقق من فهمي

إذا كان $f(x)=|x-3|$

جد قيمة

$$\int_{-1}^4 f(x)\,dx$$

مقدار التغير

إذا كان $f'(x)$ متصلاً على الفترة $[a,b]$ فإن مقدار التغير في $f(x)$ عند تغير x من (a) إلى (b) هو
$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$

أمثلة

يمثل الاقتران $f'(x) = 165 - 0.1x$ الربح الحدي (بالدينار) لكل جهاز لوحي تبيعه إحدى الشركات حيث x عدد الأجهزة المبيعة شهرياً و $f(x)$ ربح بيع x قطعة شهرياً بالدينار

جد مقدار التغير في ارباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشهرية إلى 1100 جهاز علماً أن عدد الأجهزة المبيعة الأن هو 1000 جهاز

الحل

$a = 1000$
$b = 1100$

مقدار التغير =

$$\int_a^b f'(x)\,dx$$

$$\int_{1000}^{1100} (165 - 0.1x)dx$$

$$= 165x - 0.12\frac{x^2}{2}\Big|_{1000}^{1100}$$

$$= \left(165(1100) - 0.1\frac{(1100)^2}{2}\right)$$

$$-\left(165(1000) - (0.1)\frac{(1000)^2}{2}\right)$$

$$= 6000$$

تمرين

أشارت دراسة إلى أن عدد السكان في إحدى القرى يتغير شهرياً بمعدل يمكن بالاقتران

$$f'(t) = 5 + 3t^{\frac{2}{3}}$$

حيث t عدد الأشهر من الأن و $f(t)$ عدد السكان جد مقدار الزيادة في عدد سكان القرية في الأشهر الثمانية القادمة .

الحل

$a = 0$
$b = 8$

$$\text{مقدار التغير} = \int_a^b f'(t)\,dt$$

$$= \int_0^8 5 + 3t^{\frac{2}{3}}\,dt$$

$$= 5t + 3\frac{3}{2}t^{\frac{5}{3}}\Big|_0^8$$

$$= 5t + \frac{9}{5}\left(\sqrt[3]{t}\right)^5$$

$$= \left(40 + \frac{9}{5}(32)\right) - 0$$

$$= 40 + \frac{288}{5}$$

من أراد النجاح في هذا العالم عليه أن يتغلب على أسس الفقر الستة: النوم التراخي ، الخوف ، الغضب ، الكسل ، المماطلة

أتدرب وأحل مسائل

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية :

1) $\int_{-1}^{3} 3x^2\,dx$

2) $\int_{-3}^{-2} 6\,dx$

3) $\int_{0}^{2} (3x^2+4x+3)\,dx$

4) $\int_{1}^{8} 8\sqrt[3]{x}\,dx$

5) $\int_{1}^{9} \left(\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx$

6) $\int_{-2}^{3} (-x^2+4x-5)\,dx$

7) $\int_{1}^{3} (x-2)(x+2)\,dx$

8) $\int_{-3}^{3} (9-x^2)\,dx$

9) $\int_{1}^{4} \frac{2+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$

10) $\int_{1}^{4} x^3\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right) dx$

11) $\int_{1}^{8} \left(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{5}}\right) dx$

12) $\int_{1}^{9} \left(2+\sqrt{x}\right)^2 dx$

13) $\int_{-1}^{4} |3x-|\,dx$

14) $\int_{0}^{3} |x-2|\,dx$

15) $\int_{2}^{3} \frac{x^2-1}{x+1}\,dx$

16) إذا كان :

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le 3\\ 10-x, & x>3\end{cases}$$

فأجد قيمة $\int_0^4 f(x)\,dx$

17) إذا كان :

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+5, & x<0\\ x+5, & x\ge 0\end{cases}$$

فأجد قيمة $\int_{-1}^2 f(x)\,dx$

إذا كان $\int_1^5 g(x)\ dx=8$ و $\int_1^5 f(x)\ dx=6$ و $\int_1^2 f(x)\ dx=-4$ فأجد قيمة كل مما يلي :

18) $\int_{2}^{2} g(x)\,dx$

19) $\int_{5}^{1} (g(x)-2)\,dx$

20) $\int_{1}^{2} (3f(x)+x)\,dx$

21) $\int_{2}^{5} f(x)\,dx$

22) $\int_{1}^{5} (f(x)-g(x))\,dx$

23 $\int_{1}^{5} (4f(x)+g(x))\,dx$

24) إذا كان $\int_1^m (6x-10)\ dx=4$ فأجد قيمة الثابت m.

25) تغيَر التَكلفة : يمثّل الاقتران $C'(x)=6x+1$ التّكلفة الحدّيّة (بالدينار) لكل قطة تنتجها إحدى الشركات حيث x عدد القطع المنتجة و$C(x)$ تكلفة انتاج x قطعة بالدينار أجد مقدار التغيير في التكلفة عند زيادة الشركة إنتاجها من 10 قطع إلى 20 قطعة شهرياً

26) تلوّث: يلوّث مصنع بحيرة بمعدّل يمكن نمذجته بالاقتران :

$N'(t) = 280t^{3/2}$ حيث t عدد الأشهر منذ الآن و $N(t)$ عدد الكيلو غرامات من الملوّثات الّتي يطرحها المصنع في البحيرة كم كيلو غراماً من الملوّثات يدخل البحيرة منذ الآن حتى 4 أشهر ؟؟

مهارات التفكير العيا

27) أكتشف الخطأ: أوجد خالد ناتج التكامل $\int_0^2 (x^2 + x)\, dx$ وكان حلّه على النّحو الآتي :

$\int_0^2 (x^2 + x)\, dx = (\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2)\Big|_0^2$

$=\left(\frac{1}{3}(0)^3 + \frac{1}{2}(0)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2\right) = -\frac{14}{3}$

أكتشف الخطأ في حل خالد ثم أصححه

28) تبرير : أثبت أن $\int_0^1 x^n(1-x)\, dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ حيث $n > 0$

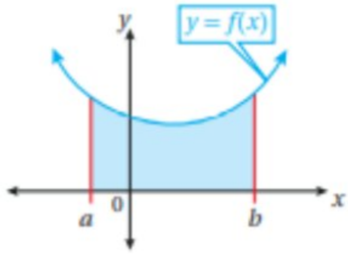
مبرراً إجابتي .

29) تحّد: إذا كان $\int_1^5 (2ax + 7)\, dx = 4a^2$ فأجد قيمة الثابت a.

الدرس الرابع
المساحة

أولاً

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران و المحور x و تقع فوق هذا المحور



يمكن إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ و المحور x والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ و تقع فوق المحور x عن طريق التكامل الأتي :

$$A = \int_a^b f(x)\, dx \quad a < b$$

عندما يبدو لك تحقيق الهدف محالاً، لا تغيره بل غير طريقة عملك لتحقيقه.

أمثلة

1) اجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = 2x - 2$ و المحور x و المستقيمين $x = 2$ و $x = 4$

الحل

اجعل $f(x) = 0$ لايجاد نقاط تقاطع الاقتران مع محور x

$$2x - 2 = 0$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{2}{2}$$
$$x = 11$$

لا يقع ضمن الحدود $[4,2]$

2) نعرف إذا كانت المساحة المطلوبة فوق محور x أو تحت محور x و ذلك بتعويض رقم ضمن الفترة المعطاة $[4,1]$

في الاقتران : إذا كان الناتج

موجب : الرسمة فوق محور x

سالب : الرسمة تحت محور x

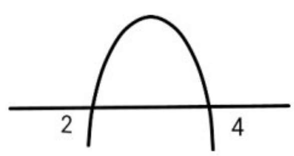
عوّض مثلاً أي رقم بين $[4,2]$

مثل 3 ← $f(x) = 2x - 2$

موجب $f(3) = 2(3) - 2 = 4 \rightarrow$

إذاً الرسمة فوق محور x

3) نرسم خط الأعداد لتوضيح المساحة فقط



4) القانون $A = \int_2^4 (2x - 2)\, dx$

$$A = x^2 - 2x\Big|_2^4$$
$$= (16 - 8) - (4 - 4)$$

$= 8$ وحدة مربعة

2) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران

$$f(x) = x^2 + 1$$

و المحور x بين المستقيمين $x = 1$ و $x = 4$

الحل

1) $f(x) = 0$

$x^2 + 1 = 0$ ← لا تحلل

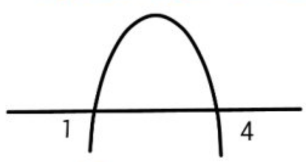
لا يوجد قيم ل x

2) نعوض رقم ضمن الفترة $[4,1]$ معرفة إذا كانت المساحة فوق أو تحت محور x

عوض 2 ← $2^2 + 1 = 5_{\text{موجب}}$

إذاً المساحة فوق محور x

3)



4) $\int_1^4 (x^2 + 1)\, dx$

$$= \frac{x^3}{3} + x\Big|_1^4$$
$$= \left(\frac{64}{3} + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + 1\right)$$
$$= \frac{64}{3} + 4 - \frac{1}{3} - 1$$
$$= \frac{63}{3} + 3$$

$A = 21 + 3 = 24$ وحدة مربعة

الأهم من أن تتقدم بسرعة هو أن تتقدم في الاتجاه الصحيح

تحقق من فهمي

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران

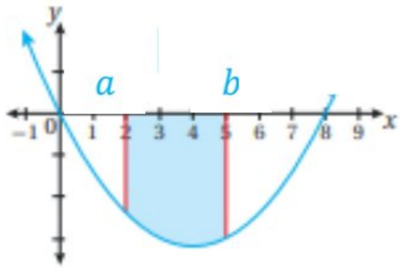
$f(x) = x + 3$ و المحور x و المستقيمين

$x = 3\,,\; x = -1$

ج : 17

ثانياً:

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران و المحور x و تقع اسفل محور x



$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

ملاحظات:

المساحة دائماً موجبة و لا يوجد مساحة سالبة

عندما تكون المساحة تحت محور x يكون تكاملها سالب

ولأن المساحة دائماً موجبة نضرب التكامل بسالب حتى تصبح المساحة موجبة

أمثلة

1) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^2 - 8x$ و المحور x و المستقيمين $x = 2\,, x = 5$

الحل

1) $x^2 - 8x = 0$

$x(x-8) = 0$

$x = 8$ أو $x = 0$

خارج الفترة [5,2]

2) نعوّض رقم ضمن الفترة في الاقتران لمعرفة إذا كانت المساحة فوق أو تحت محور x

مثلاً نعوض 3 ← $f(x) = (3)^2 - 8(3)$

$9 - 24 = -25$

سالب ← المساحة تحت محور x

وأنت تتطلع إلى ماهو بعيد ،لاتنظر باستخفاف إلى ماهو قريب وتستطيع الحصول عليه بسهولة.

3)

$$A = -\int_{2}^{5} (x^2 - 8x)\,dx$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} - 4x^2 \Big|_2^5\right)$$

$$= -\left(\left(\frac{125}{3} - 100\right) - \left(\frac{8}{3} - 16\right)\right)$$

$$= -\left(\frac{125}{3} - 100 - \frac{8}{3} + 16\right)$$

$$= -\left(\frac{117}{3} - 84\right)$$

$$= -(39 - 84) = -(45) = 45$$

وحدة مربعة

تمرين

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^2 - 4$

و المحور x و المستقيمين $x = -1$, $x = 1$

الحل

$$x^2 - 4 = 0$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$

$$x = 2 \quad , \quad x = -2$$

خارج الفترة $[1,-1]$

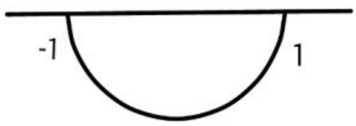
2) نعوض رقم لمعرفة مكان الرسمة

نعوض (0) بين (-1) و (1)

$$f(0) = 0 - 4 = -4$$

المساحة تحت محور x

3)



$$A = -\int_{-1}^{1} (x^2 - 4)\,dx$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} - 4x \Big|_{-1}^{1}\right)$$

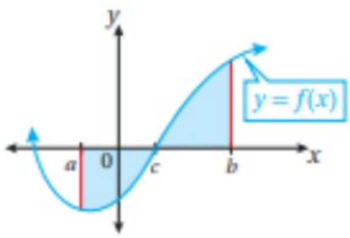
$$= -\left(\left(\frac{1}{3} - 4\right) - \left(\frac{-1}{3} + 4\right)\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{3} - 4 + \frac{1}{3} - 4\right)$$

$$= -\left(\frac{2}{3} - 8\right) = -\left(\frac{-22}{3}\right) = \frac{22}{3}$$

ثالثاً:

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران المحور x ويقع أحد جزأيها فوق المحور x ويقع الجزء الآخر اسفل محور x



$$A = -\int_a^c f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$$

تحت محور x

في هذه الحالة يكون لدينا مساحتين حيث أن المساحة الكلية $A = A_1 + A_2$

أمثلة

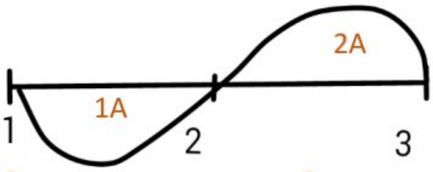
اجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = 3x^2 - 12$ ومحور x و المستقيمين $x = 3 \quad , \quad x = 1$

الحل

$$f(x) = 0$$
$$3x^2 - 12 = 0$$
$$\frac{3x^2}{3} = \frac{12}{3}$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4} \rightarrow$$

$$x = 2 \quad , \quad x = -2$$

تقع ضمن الفترة [3,1]



$$A = -\int_1^2 (3x^2 - 12)\,dx + \int_2^3 (3x^2 - 12)\,dx$$

$$= -\left(x^3 - 12x\Big|_1^2\right) + x^3 - 12x\Big|_2^3$$

$$= -((8-24) - (1-12)) + ((27-36) - (8-24))$$

$= 12$ وحدة مربعة

طريقة2

حتى لو ما عرفنا مكان المساحة فوق أو تحت

احسب كل مساحة لحالها $A = A_1 + A_2$

لحساب A_1 :

$$\rightarrow \int_1^2 3x^2 - 12 \; dx$$

$$x^3 - 12x\Big|_1^2$$

$$= (8-24) - (1-12)$$

$$= -16 + 11 = -5$$

الأن نضرب ب (-) حتى تصبح موجبة لأن المساحة لا يمكن أن تكون سالبة

$$A_1 = -(-5) = 5$$

$$A_2 = \int_2^3 (3x^2 - 12)\,dx$$

$$= x^3 - 12x\Big|_2^3$$

$$(27-36) - (8-24)$$

$$= -9 + 16 = 7$$

$$A = A_1 + A_2 = 5 + 7 = 12$$

وحدة مربعة

إن النجاح لا يتطلب عذراً، والفشل لا يترك أي مبررات

تحقق من فهمي

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الاقتران $f(x) = x^2 + 2x$ والمحور x والمستقيمين

$$x = -3 \, , x = -1$$

الحل

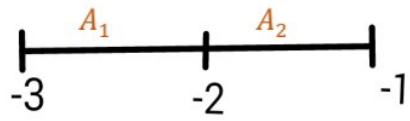
1) $x^2 + 2x = 0$

$$x(x+2) = 0$$

$x = 0$ او $x = -2$

داخل الفترة خارج الفترة

2)



$$A_1 = \int_{-3}^{-2} (x^2 + 2x)dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 |_{-3}^{-2}$$

$$\left(-\frac{8}{3} + 4\right) - \left(-\frac{27}{3} + 9\right)$$

$$= -\frac{8}{3} + 4 + \frac{27}{3} - 9$$

$$= \frac{19}{3} - 5 = \frac{19 - 15}{3} = \frac{4}{3}$$

$$A_1 = \frac{4}{3}$$

$$\rightarrow \int_{-2}^{-1} (x^2 + 2x)dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 |_{-2}^{-1}$$

$$= \left(-\frac{1}{3} + 1\right) - \left(-\frac{8}{3} + 4\right)$$

$$= -\frac{1}{3} + 1 + \frac{8}{3} - 4$$

$$\frac{7}{3} - 3 = 7 - \frac{9}{3}$$

$$= -\frac{2}{3}$$

لكن المساحة لا تكون سالبة

$$A_2 = \frac{2}{3}$$

المساحة الكلية

$$A = A_1 + A_2$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{2}{3}$$

$= \frac{6}{3} = 2$ وحدة مربعة

رابعاً:

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران المحور x ولا تكون محدودة بمستقيمين

أمثلة

1) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$$f(x) = x^2 - 3x$$

والمحور x.

الحل

إذا لم يكن لدينا حدود نجد الحدود.

نساوي الاقتران بالصفر

$$f(x) = 0$$

1) $x^2 - 3x = 0$

$$x(x-3) = 0$$

$$x = 0 \; or \; x = 3$$

2)

عوّض رقم من الفترة [0,3] عوضه مكان المساحة.

مثل (1):

$$f(x) = 1 - 3 = -2$$

تحقق محور x

أو طلع التكامل مباشرة وإذا طلع التكامل سالب ← المساحة دايما موجبة عكس الإشارة.

$$A = -\int_0^3 f(x)dx$$

$$= \int_0^3 (x^2 - 3x)dx$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\Big|_0^3\right)$$

$$= -\left(\left(\frac{27}{3} - \frac{27}{2}\right) - (0)\right) = -\left(\frac{54-81}{6}\right)$$

$$= -\left(-\frac{27}{6}\right) = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$ وحدة مربعة

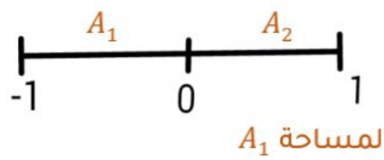
2) أجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$$f(x) = x^3 - x$$

والمحور x.

الحل

$$x^3 - x = 0$$
$$x(x^2-1) = 0$$
$$x(x-1)(x+1) = 0$$
$$x = 0 \qquad x = 1 \qquad x = -1$$



لإيجاد قيمة المساحة A_1

$$\rightarrow \int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0}$$

$$= (0-0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2-4}{8}\right) = -\left(-\frac{2}{8}\right)$$

$$= +\frac{1}{4}$$

$$A_1 = \frac{1}{4}$$

لحساب A_2

$$\rightarrow \int_0^1 (x^3 - x)dx$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - (0)$$

$$= \frac{2-4}{4} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

لكن المساحة لا تكون سالبة

$$A_2 = \frac{1}{4}$$

$$A = A_1 + A_2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

3) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران

$$f(x) = 3x^2 - 3$$

والمحور x.

الحل

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3(x^2 - 1) = 0$$

$$3(x-1)(x+1) = 0$$

$$x = 1 \quad x = -1$$

$$A = \int_{-1}^{1} (3x^2 - 3)dx$$

$$= -(x^3 - 3x|_{-1}^{1})$$

$$= (1-3) - (-1+3)$$

$$= -(-2-2) = -(-4)$$

$$A = 4$$

4) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - 6x$$

والمحور x.

الحل

$$x^3 - 5x^2 - 6x = 0$$

$$x(x^2 - 5x - 6) = 0$$

$$x(x-6)(x+1) = 0$$

$$x = 0 \;\; or \;\; x = 6 \;\; or \;\; x = -1$$

$$A = A_1 + A_2$$

لحساب A_1 نكامل $\int_{-1}^{0} f(x)dx$

$$\rightarrow \int_{-1}^{0} (x^3 - 5x^2 - 6x)dx$$

$$\left.\frac{x^4}{4}-\frac{5x^3}{3}-3x^2\right|_{-1}^{0}$$

$$=(0)-\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{3}-\frac{3}{1}\right)$$

$$=-\left(\frac{23}{12}-3\right)$$

$$=-\left(\frac{23-36}{12}\right)$$

$$=-\left(-\frac{13}{12}\right)=\frac{13}{12}$$

إذاً قيمة $A_1=\frac{13}{12}$

لحساب A_2 نجد:

$$\rightarrow\int_0^6(x^3-5x^2-6x)dx$$

$$\left.\frac{x^4}{4}-\frac{5x^3}{3}-2x^2\right|_0^6$$

$$=\left(\frac{6^4}{4}-\frac{5(6)^3}{3}-2(6)^2\right)-(0)$$

$$=\left(\frac{1296}{4}-\frac{1080}{3}-72\right)$$

$$=\left(\frac{3888-4320}{12}-72\right)$$

$$=-\frac{432}{12}-72$$

$$=\frac{-432-864}{12}$$

$$=-\frac{1296}{12}=-108$$

لكن المساحة لا تكون سالبة

$$A_2=108$$

$$A=A_1+A_2=\frac{13}{12}+108$$

$$=\frac{1309}{12}$$

تحقق من فهمي

1) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى:

$f(x)=x^2+5x+4$

والمحور x.

2) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى:

$f(x)=x^3-9x$

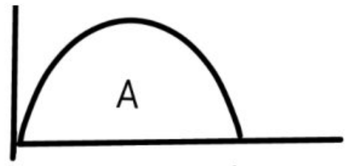
والمحور x.

3) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى.

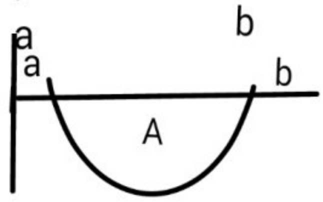
$f(x)=x^2(2-x)$

والمحور x.

إيجاد المساحة من الرسم



$$A = \int_a^b f(x)dx$$

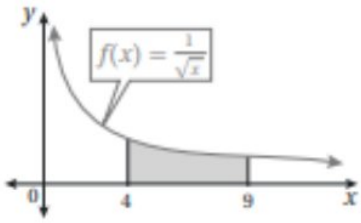


$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

مثال:

جد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلات الآتية:

1)



الحل

$$A = \int_4^4 f(x)dx$$

$$= \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$= \int_4^9 x^{-\left(\frac{1}{2}\right)}dx$$

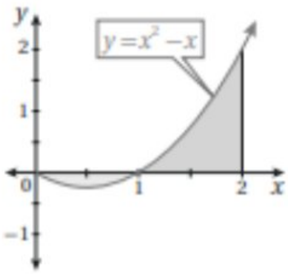
$$= 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_4^9$$

$$= 2\sqrt{x}\Big|_4^9$$

$$= (2.3) - (2.2)$$

$$= 6 - 4 = 2$$

2)



الحل

$$A = -\int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$$

$$= -\int_0^1 (x^2 - x)dx + \int_1^2 (x^2 - x)dx$$

$$= -\int_0^1 (x^2 - x)dx + \int_1^2 (x^2 - x)dx$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right) + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big|_1^2\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - (0) + \left(\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\right)$$

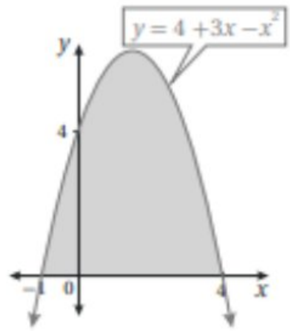
$$= -\left(\frac{2-3}{6}\right) + \left(\frac{7}{3} - \frac{4}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\left(-\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{7}{3} - \frac{3}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{6} + \frac{14-9}{6} = -\left(-\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)$$

$$\frac{1}{6} + \frac{15}{6} = \frac{16}{6}$$

3) جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل الآتي:



الحل

$$A = \int_{-1}^{4} (4 + 3x - x^2)dx$$

$$= 4x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{4}$$

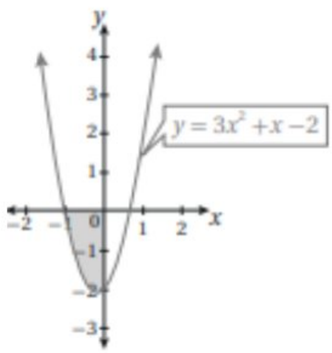
$$= \left(16 + 24 - \frac{64}{3}\right) - \left(-4 + \frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

$$40 - \frac{64}{3} + 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = 44 - \frac{65}{3} - \frac{3}{2}$$

$$= 44 - \frac{130 - 9}{6} = 44 - \frac{121}{6}$$

$$= \frac{264 - 121}{6} = \frac{143}{6}$$

4) جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل الآتي:



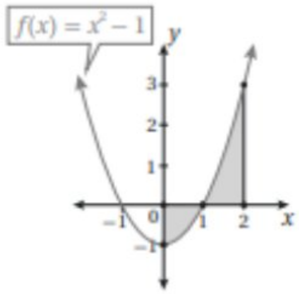
$$A = \int_{-1}^{0} (3x^2 + x - 2)\, dx$$

$$A = \left(x^3 + \frac{x^2}{2} - 2x\Big|_{-1}^{0}\right)$$

$$= -\left((0) - \left(-1 + \frac{1}{2} + 2\right)\right)$$

$$= -\left(0 - \left(\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{3}{2}$$

5) جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل الآتي:



الحل

$$A = -\int_{0}^{1} (x^2 - 1)dx + \int_{1}^{2} (x^2 - 1)dx$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} - x\Big|_0^1\right) + \left(\frac{x^3}{3} - x\Big|_1^2\right)$$

$$= -\left(\left(\frac{1}{3}\right) - 1\right) - (0) + \left(\left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right)$$

$$= -\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1\right)$$

$$= \frac{2}{3} + \left(\frac{7}{3} - 1\right)$$

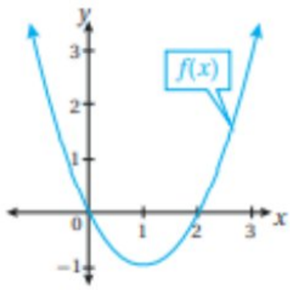
$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$$ وحدة مربعة

إن النجاح هو محصلة اجتهادات صغيرة تتراكم يوما بعد يوم

6) يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران:

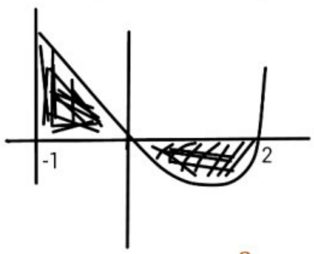
$$f(x) = x^2 - 2x$$

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x والمستقيم $x = -1$



الحل

نقوم برسم المستقيم $x = -1$



$$A = \int_{-1}^{0} (x^2 - 2x)dx \pm \int_{0}^{2} (x^2 - 2x)\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 \Big|_{-1}^{0} + -\left(\frac{x^3}{3} - x^2 \Big|_{0}^{2}\right)$$

$$= \left(0 - \left(-\frac{1}{3} - 1\right)\right) + \left(\left(\frac{8}{3} - 4\right) - 0\right)$$

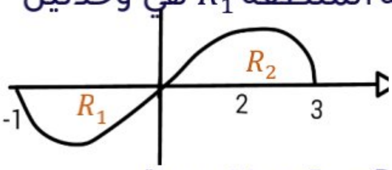
$$= \frac{4}{3} + -\left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

أسئلة فخمة

1) يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$

إذا كانت مساحة المنطقة R_1 هي وحدتين مربعتين



ومساحة المنطقة R_2 هي 5 وحدات مربعة.

جد قيمة:

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx$$

الحل

$$\int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx$$

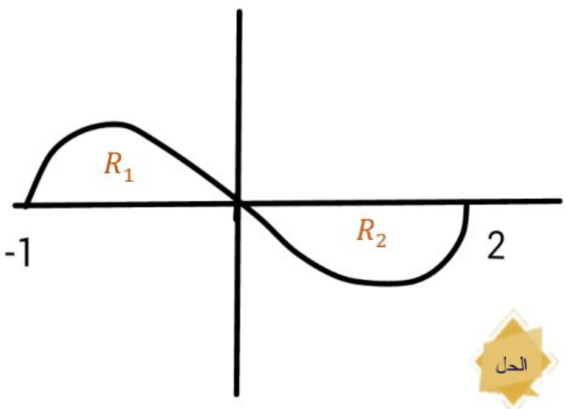
$$= -2 + 5 = 3$$

سالبة لأنها أسفل المحور x.

2) في الشكل الآتي:

إذا كانت قيمة المساحة $R_1 = 13$ وكان:

$\int_{-1}^{2} f(x)dx = 7$ جد قيمة المساحة R_2؟



الحل

إن النجاح هو الحصول على ما تريد، والسعادة أن تريد ما تحصل عليه

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx$$

$$7 = 13 + \int_{0}^{2} f(x)dx$$

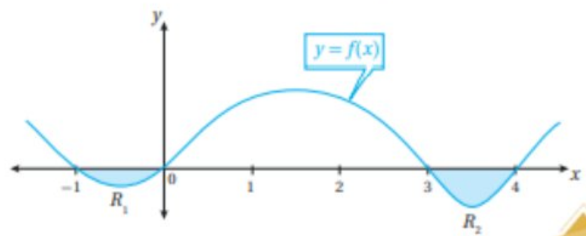
$$\rightarrow \int_{0}^{2} f(x)dx = -6$$

$R_2 = 6$ لأن المساحة لاتكون سالبة

3) يبين الشكل التالي منحنى الاقتران $f(x)$

إذا كانت مساحة المنطقة R_1 هي وحدتين مربعتين ومساحة R_2 هي 3 وحدات مربعة وكان $\int_0^4 f(x)dx = 10$

جد قيمة $\int_{-1}^{3} f(x)dx$



الحل

$$\int_{0}^{4} f(x)dx = \int_{0}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{4} f(x)dx$$

$$10 = \int_{0}^{3} f(x)dx + -3$$

$$\rightarrow \int_{0}^{3} f(x)dx = 13$$

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx = 13$$

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{3} f(x)dx$$

$$= -2 + 13$$

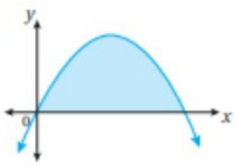
$$= 11$$

4) يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران:

$$f(x) = kx(4 - x)$$

إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين الاقتران والمحور x هي 32 وحدة

جد قيمة الثابت k



الحل

نجد نقاط التقاطع مع محورx

$$kx(4 - x) = 0$$

$$\frac{kx}{k} = \frac{0}{k} \rightarrow x = 0 \qquad x = 4$$

$$A = \int_{0}^{4} (kx(4 - x)dx) = 32$$

$$\int_{0}^{4} 4kx - kx^2\, dx = 32$$

$$2kx - \frac{kx^3}{3}\Big|_0^4 = 32$$

$$32k - \frac{64}{3}k = 32$$

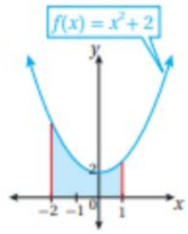
$$32k - \frac{64}{3}k = 32$$

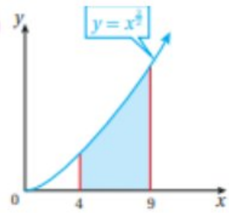
$$\frac{96k - 64k}{3} = \frac{32}{1}$$

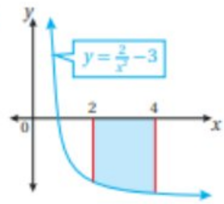
$$\frac{96}{32} = \frac{32k}{32} \rightarrow k = \frac{96}{32} = 3$$

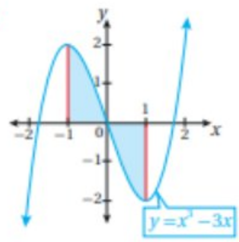
أتدرب وأحل مسائل

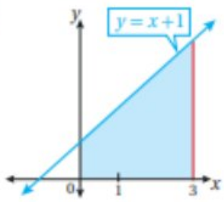
أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلات البيانية الآتية:

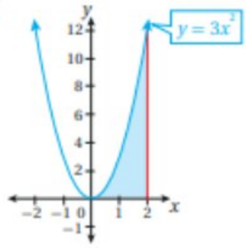
1


2


3


4


5


6


7) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 2$$

والمحور x والمستقيمين $x=0$ و $x=2$

8) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$$f(x) = 9 - x^2$$

والمحور x

9) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$$f(x) = x^3 + 4x$$

والمحور x والمستقيمين $x = 2$ و $x = -1$

10) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$$f(x) = -7 + 2x - x^2$$

والمحور x والمستقيمين $x = 4$ و $x = 1$

11) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$$f(x) = 5 - x$$

والمحور x والمستقيمين $x = 5$ و $x = 3$

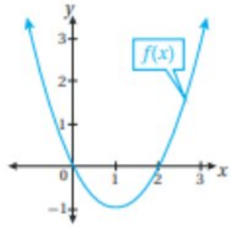
12) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$$f(x) = (x + 1)(x - 4)$$

والمحور x

يُبيَن الشكل المجاور منحنى الاقتران

$f(x) = x^2 - 2x$



13)أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران و والمحور x

14) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران و المحور x والمستقيم $x = 3$

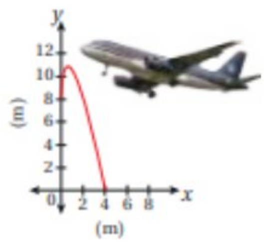
15) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران و والمحور x والمستقيم $x = -1$

16) يُبيِّن التمثيل البياني المجاور شكل السطح العلوي لجناح طائرة، مُمثَّلًا بالمعادلة:

$$y = 8 + 8\sqrt{x} - 6x$$

حيث: $0 \le x \le 4$

أجد مساحة السطح العلوي لجناح الطائرة.

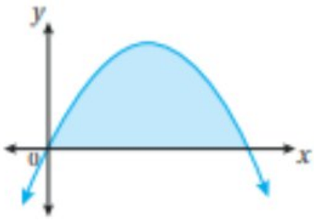


مهارات التفكير العيا

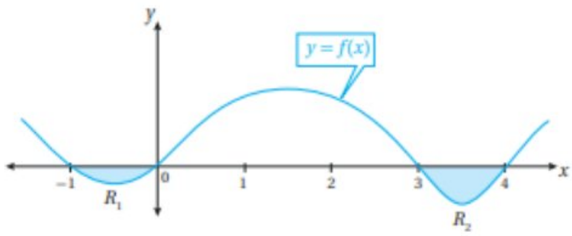
17)تحدّ: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران:

$$y = kx(4 - x)$$

إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x هي 32 وحدة مربعة، فأجد قيمة الثاب k .



18) تبرير: يبيّن الشكل التالي منحنى الاقتران $f(x)$ إذا كانت مساحة المنطقة R_1 هي وحدتين مربعتين ،ومساحة المنطقة R_2 هي 3 وحدات مربعة وكان: $\int_0^4 f(x)dx$ فأجد. $\int_{-1}^3 f(x)dx$ مبررًا إجابتي



لم أستطع انتظار النجاح، لذا بدأت دونه.

الدرس الخامس: تكامل اقترانات خاصة

تكامل الاقتران الأسّي واقتران الجيب والجتا

قواعد

1. $\int e^x \, dx = e^x + c$
2. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
3. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

أمثلة

جد كلا من التكاملات الآتية :

1) $\int (e^x + 8) \, dx$

الحل

$= e^x + 8x + c$

2) $\int (5\cos x + \sqrt{x}) \, dx$

الحل

$= \int (5\cos x + x^{\frac{1}{2}}) \, dx = 5\sin x + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$

3) $\int \left(4\sin x - \frac{1}{x^2}\right) dx$

الحل

$= \int (4\sin x - x^{-2}) \, dx$

$= -4\cos x - \frac{x^{-1}}{-1} + c$

$= -4\cos x + \frac{1}{x} + c$

4) $\int (5e^x + 4) \, dx$

الحل

$= 5e^x + 4x + c$

تحقق من فهمي

a) $\int (5x^2 + 7e^x) \, dx$

b) $\int \left(9\cos x + \frac{4}{x^3}\right) dx$

c) $\int (\sqrt[3]{x} - \sin x) \, dx$

إرادة المثابرة غالباً ما تكون الفرق بين الفشل، والنجاح .

تكامل الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

قاعدة

$$1)\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+c,\ x\neq 0$$

وبشكل عام

$$2)\int \frac{a}{x}dx=a\ln|x|+c$$

حيث a عدد ثابت

أمثلة

جد التكاملات الآتية :

$$1)\int \left(\frac{1}{x}+6\sin x\right)dx$$

الحل

$$=\ln|x|-6\cos x+c$$

$$2)\int 2e^x+\frac{3}{x}\,dx$$

الحل

$$=2e^x+3\ln|x|+c$$

$$3)\int \frac{2x^5-4}{x}dx$$

الحل

قلب الحب الرياضي نجهز:

$$\int \frac{2x^5-4}{x}dx$$

$$=\int\left(\frac{2x^5}{x}-\frac{4}{x}\right)dx$$

$$=\int\left(2x^4-\frac{4}{x}\right)dx=\frac{2x^5}{5}-4\ln x+c$$

$$4)\int \frac{1-x^2}{5x}dx$$

الحل

نجهز $\int \frac{1}{5x}-\frac{x^2}{5x}dx=\int \frac{1}{5x}-\frac{x}{5}dx$

نكامل $=\frac{1}{5}\ln|x|-\frac{x^2}{5\times 2}+c$

$$=\frac{1}{5}\ln|x|-\frac{x^2}{10}+c$$

تحقق من فهمي

$$a)\int\left(\frac{1}{x}+8e^x\right)dx$$

$$b)\int\left(\sin x-\frac{5}{x}\right)dx$$

$$c)\int\left(\frac{x^2-7x+2}{x^2}\right)dx$$

سر السعادة ، هو وجود الأحلام ، أما سر النجاح، فهو تحقيق هذه الأحلام

تكامل اقترانات في صورة $f(ax+b)$

قواعد

إذا كان a, b عددين حقيقيين حيث a لا تساوي الصفر و e هو العدد النيبري فإن :

1)

$$\int (ax+b)^n \, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} \quad n \neq 0$$

2)

$$\int e^{ax+b} \, dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$$

3)

$$\int \sin(ax+b) \, dx = \frac{-\cos(ax+b)}{a} + c$$

4)

$$\int \cos(ax+b) \, dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + c$$

5)

$$\int \frac{k}{ax+b} dx = \frac{k}{a} \ln|ax+b| + c$$

أمثلة

جد التكاملات الآتية:

1) $\int (2x+7)^5 dx$

الحل

$$= \frac{(2x+7)^6}{6 \times 2} + c = \frac{(2x+7)^6}{12} + c$$

$$= \frac{1}{12}(2x+7)^6 + c$$

2) $\int \frac{1}{\sqrt{4x-2}} dx$

الحل

نجهز $\int (4x-2)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{1}\frac{(4x-2)^{\frac{1}{2}}}{4} + c$

$$= \frac{2}{4}(4x-2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(4x-2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4x-2} + c$$

3) $\int 2e^{4x+3} dx$

الحل

$$= 2\frac{e^{4x+3}}{4} + c = \frac{1}{2}e^{4x+3} + c$$

4) $\int 2\sin(4x+3) dx$

الحل

$$\frac{-2\cos(4x+3)}{4} + c = -\frac{1}{2}\cos(4x+3) + c$$

5) $\int (5\cos(2x+3) + \sqrt[3]{x}) dx$

الحل

نجهز $\int (5\cos(2x+3) + x^{\frac{1}{3}}) dx$

$$= \frac{5\sin(2x+3)}{2} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c$$

$$= \frac{5}{2}\sin(2x+3) + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$$

النجاح يعتمد على التحضير، فدون التحضير، يكون الفشل مؤكداً

$$6)\int \frac{1}{8x-1}\,dx$$

الحل

$$=\frac{1}{8}\ln|8x-1|+c$$

$$7)\int (1-e^{2x-3})\,dx$$

الحل

$$=x-\frac{e^{2x-3}}{2}+c$$

$$=x-\frac{1}{2}e^{2x-3}+c$$

$$8)\int (\sin 2x-\cos 2x)\,dx$$

الحل

$$=-\frac{\cos 2x}{2}-\frac{\sin 2x}{2}+c$$

$$=-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x+c$$

$$9)\int \frac{3}{2x-1}\,dx$$

الحل

$$=\frac{3}{2}\ln|2x-1|+c$$

$$10)\int 5-\sin(5-5x)\,dx$$

الحل

$$5x+\frac{\cos(5-5x)}{-5}+c$$

$$=5x+\frac{1}{-5}\cos(5-5x)+c$$

$$11)\int \frac{1}{\frac{1}{3}x-2}$$

الحل

$$=\frac{1}{\frac{1}{3}}\ln\left|\frac{1}{3}x-2\right|+c=3\ln\left|\frac{1}{3}x-2\right|+c$$

$$12)\int \left(2x-1+\frac{8}{5x+4}\right)dx$$

الحل

$$=x^2-x-\frac{8}{5}\ln|5x+4|+c$$

$$13)\int 3\cos x+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\ \ dx$$

الحل

نجهز $\int \left(3\cos x+\frac{5}{x}+4x^{-2}\right)\ dx$

نكامل $=3\sin x+5\ln|x|+\frac{4x^{-1}}{-1}+c$

$$=3\sin x+5\ln|x|-\frac{4}{x}+c$$

$$14)\int (3x+2)^5\,dx$$

الحل

$$=\frac{(3x+2)^6}{6*3}+c=\frac{(3x+2)^6}{18}+c$$

$$=\frac{1}{18}(3x+2)^6+c$$

$$15)\int \frac{x+1}{x^2+2x+1}\,dx$$

الحل

نجهز $\int \frac{x+1}{(x+1)(x+1)}\,dx=\int \frac{1}{(x+1)}\,dx$

$$=\ln|x+1|+c$$

$$16)\int (\sin(2x+3)+\cos(3x+2))\,dx$$

الحل

$$=\frac{-\cos(2x+3)}{2}+\frac{\sin(3x+2)}{3}+c$$

$$=-\frac{1}{2}\cos(2x+3)+\frac{1}{2}\sin(3x+2)+c$$

17) $\int (\frac{1}{8}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{x})dx$

الحل

$$= \frac{1}{8}\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 4\ln|x| + c$$

$$= \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - 4\ln|x| + c$$

18) $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$

الحل

نجهز $\int (x-1)^{-\frac{1}{2}}dx$

نكامل $= 2(x-1)^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x-1} + c$

تحقق من فهمي

a) $\int (7x-5)^6 \, dx$

b) $\int \sqrt{2x+1} \, dx$

c) $\int 4\cos(3x-7) \, dx$

d) $\int (\sin 5x + e^{2x}) \, dx$

e) $\int (6x^2 - 3e^{7x+1}) \, dx$

f) $\int \frac{5}{3x-2} \, dx$

أمثلة من الحياة

تذكر أن:

$$f(x) = \int f'(x)\, dx$$

1) في دراسة أجرتها شركة نفطيّة تبيّن أن معدل إنتاج إحدى الآبار النّفطيّة ينمذج بالاقتران

$$R'(t) = \frac{100}{t+1} + 5$$

حيث R(t) عدد البراميل المنتجة بالآلاف في السنة وt عدد السنوات منذ بدء ضخ النفط في البئر، أجد عدد براميل النفط المنتجة بعد 9 سنوات من بدء عملية الضخ من البئر علماً أن :

$$R(0) = 0$$

الحل

$$R(t) = \int R'(t)\, dt$$

$$R(t) = \int \left(\frac{100}{t+1} + 5\right) dt$$

$$= 100\ln|t+1| + 5t + c$$

لإيجاد قيمة c :

$$R(0) = 0$$

$$100\ln|t+1| + 5t + c = 0$$

$$0 + c = 0 \rightarrow c = 0$$

$$R(t) = 100\ln|t+1| + 5t$$

$$R(9) = 100\ln|10| + 45$$

النجاح هو تركيز جميع قوى كيانك على ما تتحرق رغبةً في تحقيقه

2)إذا كان ميل المماس لمنحنى y هو

$$\frac{dy}{dx} = 6e^{2x} + 2e^{-x}$$

فأجد قاعدة العلاقة y علما أن منحناها يمر بالنّقطة (0,2)

الحل

$$y = \int \text{الميل}\, dx$$

$$y = \int (6e^{2x} + 2e^{-x})\, dx$$

$$y = \frac{6e^{2x}}{2} + \frac{2e^{-x}}{-1} + c$$

$$= 3e^{2x} - \frac{2}{e^{x}} + c$$

لإيجاد قيمة c:

نعوض النقطة (0,2)

$$3e^{0} - \frac{2}{e^{0}} + c = 2$$

$$3 - 2 + c = 2$$

$$1 + c = 2 \rightarrow c = 1$$

$$y = 3e^{2x} - \frac{2}{e^{x}} + 1$$

تحقق من فهمي

أشارت دراسة في إحدى القرى أن عدد السكان يتغير سنويّاً بمعدل

$$P'(t) = 105e^{0.03t}$$

حيث t عدد السنوات منذ عام 2010 و p(t) عدد السكان .

جد عدد سكان القرية عام 2020 علما أن عددهم عام 2010 هو 3500شخص

تكامل الاقترانات في صورة $\frac{f'(x)}{f(x)}$

إذا كان البسط هو مشتق المقام فإن جواب التّكامل يساوي:

$$\ln|\text{المقام}|$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + c$$

الرجل الناجح هو الذي يظل يبحث عن عمل، وإن وجد وظيفة.

أمثلة

1) $\int \frac{3x^2}{x^3+5}dx$

الحل

لاحظ أن البسط هو مشتقة المقام

$$= \ln|x^3+5| + c$$

2) $\int \frac{6x}{x^2+9}dx$

الحل

$$= 3\int \frac{2x}{x^2+9}dx = 3\ln|x^2+9| + c$$

3) $\int \frac{x-1}{x^2-2x+2}dx$

الحل

$$\frac{1}{2}\int \frac{2(x-1)}{x^2-2x+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| + c$$

4) $\int \frac{e^x}{e^x-1}dx$

الحل

لاحظ أن البسط هو مشتقة المقام

$$= \ln|e^x-1| + c$$

5) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}dx$

الحل

$$\frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| + c$$

تحقق من فهمي

a) $\frac{2x+3}{x^2+3x}dx$

b) $\frac{ax^2}{x^3+8}dx$

c) $\frac{x+1}{4x^2+8x}dx$

d) $\frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}dx$

e)

تلوث: يعالج التلوث في بحيرة باستعمال مضاد للبكتريا. إذا كان عدد الخلايا البكتيرية الضارة لكل مليلتر من الماء في البحيرة يتغير بمعدل:

$$N'(t) = -\frac{2000t}{1+t^2}$$

حيث $N(t)$ عدد الخلايا البكترية لكل مليلتر من الماء بعد t يوماً من استعمال المضاد، فأجد $N(t)$ ، علماً بأن العدد الابتدائي للخلايا هو 5000 خلية لكل مليلتر

$f)$

إذا كانت :

$$f'(x) = e^{-x}$$

جد قاعدة الاقتران *fx)* علماً أنه يمر بالنقطة (0,3)

فقط أولئك الذين يجرؤون على الفشل، هم من يصلون للنجاح في النهاية .

g)

إذا علمت أن :

$$f'(x) = \frac{3}{x} - 4$$

جد قاعدة الاقتران $f(x)$ علماً أنه يمر بالنقطة $(1,0)$

h)

$$f'(x) = 4e^x - 2$$

جد قاعدة الاقتران $f(x)$ علماً أنه يمر بالنقطة $(0,1)$

التكاملات المحدودة للاقترانات الخاصة

أمثلة

1) $\int_0^1 (6e^{-3x} + 12x^3)dx$

$$\frac{6e^{-3x}}{-3} + \frac{12x^4}{4}\Big|_0^1 = -2e^{-3x} + 3x^4\Big|_0^1$$

$$= (-2e^{-3} + 3) - (-2)$$

$$= -2e^{-3} + 5$$

2) $\int_{-1}^2 (x+1)^3 dx$

الحل

$$\frac{(x+1)^4}{4}\Big|_{-1}^{2} = \left(\frac{81}{4}\right) - (0) = \frac{81}{4}$$

3) $\int_2^3 \frac{1}{7-2x} dx$

الحل

$$= \frac{1}{-2}\ln|7-2x|\Big|_2^3$$

$$\frac{1}{-2}\ln|1| - (\frac{1}{-2}\ln|3|) = 0 - (\frac{1}{-2}\ln|3|)$$

$$= (\frac{1}{2}\ln|3|)$$

4) $\int_0^1 \sqrt[3]{1+7x}dx$

الحل

$$\text{نجهز } \int_0^1 (1+7x)^{\frac{1}{3}}dx$$

$$= \frac{3}{4}\frac{(1+7x)^{\frac{4}{3}}}{7}\Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{28}\sqrt[3]{(1+7x)^4}\Big|_0^1 = (\frac{3}{28}(2)^4) - \left(\frac{3}{28}\sqrt[3]{1}\right)$$

$$= \frac{3}{28}(16) - \frac{3}{28} = \frac{48}{28} - \frac{3}{28} = \frac{45}{28}$$

5) $\int_0^1 e^x(4-e^x)\, dx$

الحل

$$\text{نجهز } \int_0^1 (4e^x - e^{2x})\, dx$$

$$\text{نكامل } = 4e^x - \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1$$

$$= \left(4e - \frac{1}{2}e^2\right) - \left(4 - \frac{1}{2}\right) = 4e - \frac{1}{2}e^2 - \frac{7}{2}$$

تحقق من فهمي

$$a)\ \int_0^2 (4e^{2x}+7)dx$$

$$b)\ \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{6x+1}}dx$$

$$c)\ \int_0^4 \frac{8x}{x^2+1}dx$$

$$d)\ \int_1^3 (1+\frac{1}{x})dx$$

صحصِح

أسئلة قوة

جد التكاملات الآتية :

$$1)\ \int (x^2+6x+9)^5\, dx$$

الحل

ركز منيح نحلل ما داخل القوس :

$$\int \left((x+3)(x+3)\right)^5 dx$$

$$= \int ((x+3)^2)^5\, dx$$

$$= \int (x+3)^{10}\, dx$$

نكامل $= \dfrac{(x+3)^{11}}{11} + c$

$$2)\ \int (x^2-10x+25)^7\, dx$$

الحل

$$\int \left((x-5)(x-5)\right)^7 dx = \int ((x-5)^2)^7\, dx$$

$$\int (x-5)^{14}\, dx$$

$$= \frac{(x-5)^{15}}{15} + c$$

$$3)\ \int \frac{\cos x}{1+5\sin x}dx$$

الحل

مشتقة المقام تساوي $5\cos x$

نضرب البسط في 5 وبرّا $\frac{1}{5}$

$$\frac{1}{5}\int \frac{5\cos x}{1+5\sin x}dx = \frac{1}{5}\ln|1+5\sin x| + c$$

$$4)\ \int \frac{\sin x}{2+3\cos x}dx$$

الحل

مشتقة المقام تساوي: $-3\sin x$

$$-\frac{1}{3}\int \frac{-3\sin x}{2+3\cos x}dx$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|2+3\cos x| + c$$

$$5)\ \int \sqrt[3]{e^x}\, dx$$

الحل

نجهز $\int (e^x)^{\frac{1}{3}}\, dx = \int (e^{\frac{1}{3}x})\, dx$

$$= \frac{3}{1}(e^{\frac{1}{3}x}) + c = 3(e^{\frac{1}{3}x}) + c$$

الإنجاز الحقيقي في هذا العالم المادي الباهت ،هو أن تتمسك بنور الله حتى تلقاه

0785351625

أتدرب وأحل مسائل

1) $\int \left(\frac{1}{2}e^{x} + 3x\right) dx$

2) $\int \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2}\right) dx$

3) $\int (e^{x} + 1)^2\, dx$

4) $\int \frac{1}{x}(x+2)\, dx$

5) $\int (\frac{4}{x^3} + \frac{5}{x})\, dx$

6) $\int (\sqrt{x} + 3e^{6x} - \frac{7}{x})\, dx$

7) $\int \left(\frac{3}{x+1} - 5e^{-2x}\right) dx$

8) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}}\, dx$

9) $\int (\sin(2x-3) + e^{6x-4})\, dx$

10) $\int 4\cos(6x+1)\, dx$

11) $\int \frac{\sin x + 3\cos x}{4}\, dx$

12) $\int (e^{6x} + (1-2x)^{6x})dx$

13) $\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$

14) $\int \frac{x^2}{x^3-3}\, dx$

15) $\int \frac{x^2 - x}{2x^3 - 3x^2 + 12}\, dx$

16) $\int \frac{e^{x} + 7}{e^{x}}\, dx$

17) $\int \frac{1}{5 - \frac{1}{4}x}\, dx$

18) $\int (4x^3 + 2 + 3\sin(5-3x))\, dx$

19) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\, dx$

20) $\int \frac{3}{(1-4x)^2}\, dx$

21) $\int \frac{1 + xe^{x}}{x}\, dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

22) $\int_1^2 \left(2x - 3e^{x} - \frac{4}{x}\right) dx$

23) $\int_0^5 \left(\frac{x}{x^2+10}\right) dx$

24) $\int_3^4 (2x-6)^4\, dx$

25)

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:

$v(t) = e^{-2t}$

حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم 2 m ، فأجد موقع الجُسَيْم بعد t ثانية من بَدْء الحركة

بإمكان عقلك أن يدهشك إذا استطعت أن تقول لنفسك يمكنني تحقيق ذلك، يمكنني عمل ذلك

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد

قاعدة الاقتران: $f(x)$

26) $f'(x) = 5e^x \quad : (0, \frac{1}{2})$

27) $f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \quad : (1, -1)$

28) $f'(x) = e^{-x} + x^2 \quad : (0,4)$

29)

إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{3}{x+e}$$

فأجد قاعدة العلاقة y علماً بأن منحناها يمر بالنقطة: (e, e^2)

بيئة :في دراسة تناولت أسماكًا في بحيرة، تبيَّن أنَّ عدد الأسماك p(t) يتغيَّر بمُعدَّل:

$$P'(T) = -0.51e^{-0.03t}$$

حيث t الزمن بالسنوات بعد بَدْء الدراسة:

30)

أجد قاعدة الاقتران p(t) عند أيِّ زمن t ، علمًا بأنَّ عدد الأسماك عند بَدْء الدراسة هو 1000 سمكة.

31)

أجد عدد الأسماك بعد 10 سنوات من بَدْء الدراسة.

طب :يلتئم جرح جلدي بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران:

$$A'(t) = -0.9e^{0.1t}$$

حيث t عدد الأيام بعد الإصابة بالجرح، و $A(t)$ مساحة سطح الجرح بالسنتيمتر المربع:

32)

أجد قاعدة الاقتران $A(t)$ عند أيِّ زمن t ، علمًا بأنَّ مساحة سطح الجرح عند الإصابة هي $9\ cm^2$

33)

أجد مساحة سطح الجرح بعد 5 أيام من الإصابة.

مهارات التفكير العليا

34)

أكتشف الخطأ :أوجد أحمد ناتج التكامل $\int \frac{1}{2x} dx$: وكان حلّه على النحو المجاور:

$$\int \frac{1}{2x} dx = \int \frac{2 \times 1}{2x} dx$$
$$= \int \frac{2}{2x} dx = ln\ |2x| + c$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ أحمد، ثم أُصحِّحه.

تحدٍّ :أجد كل تكامل ممّا يأتي:

35) $\int \sqrt{e^x}\, dx$

36) $\int \frac{cosx}{3 + 2sin\ x} dx$

37) $\int (x^2 + 2x + 1)^5\, dx$

أكتشف المُختلِف :أيُّ التكاملات الآتية مُختلِف، مُبرِّرًا إجابتي؟

$$\int \frac{1}{(x+1)^2} dx$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$$
$$\int \frac{1}{x+1} dx$$
$$\int (x-1)^3\, dx$$

الدرس السادس
التكامل بالتعويض

نستخدم التكامل بالتعويض بشكل عام إذا كان داخل التكامل اقتران مضروب بمشتقه

$$\int f(g(x))\ \ g'(x)\ dx$$

الدرس 6 حالات التكامل بالتعويض

1) مرفوع القوة وما داخل القوس اقتران (غير خطي) ومشتقة موجودة

نفرض أن ما داخل القوس =u

2) جذر وما داخله ليس خطي ومشتقة ما داخله موجودة

نفرض أن ما داخل الجذر =u

3) اقتران مثلثي sin أو cos وما داخله ليس خطي ومشتقه موجودة

نفرض أن: ما داخله =u

4) اقتران اس $e^{\text{قوة}}$

والقوة ليست خطيه نفرض أن القوة =u

5) اقتران (ln x) لوغاريتمي مع وجود x في المقام (مشتقته) نفرض أن $u = In\ x$

الدرس 6 خطوات التكامل بالتعويض

1) نحدد قيمة الفرض u
2) نجد dx $dx = \frac{du}{\text{مشتقة u}}$
3) نعوض u بدل الفرض ونعوض قيمة dx في التكامل
4) نختصر المشتقة
5) نكامل بدلالة u
6) نعيد قيمة u التي فرضناها

أمثلة

جد التكاملات الآتية:

$$1)\int 3x^2(x^3+1)^7\,dx$$

الحل

الخطوات: لاحظ أن ما داخل القوس مشتقة موجودة

-1 نفرض أن: $u = x^3 + 1$

-2 نجد قيمة dx $dx = \frac{du}{\text{مشتقة u}}$

$dx = \frac{du}{3*2}$

-3 نعوض قيمة u و dx في التكامل

$$\int 3x^2(u)^7\frac{du}{3x^2}$$

إن القلم لن يكتب الهدف إن لم يغرس في محبرة التقوى كان كسره أولى

4-نختصر

$$\int 3\cancel{x^2}(u)^7 \frac{du}{\cancel{3x^2}}$$

5- نكامل:

$$\int u^7 du = \frac{u^8}{8} + c$$

6-نعيد قيمة u الأصلية:

$$= \frac{(x^3+1)^7}{7} + c = \frac{1}{7}(x^3+1)^7 + c$$

$2)\int 2x\sqrt{x^2+6}\,dx$

الحل

نفرض u

$u = x^2+6$

نجد dx

$du = \frac{dx}{2x}$

نعوض ونختصر

$$\int 2\cancel{x}\sqrt{4}\frac{du}{2\cancel{x}}$$

نكامل $\int\sqrt{4}du$

$$= \int u\frac{1}{2}du$$

نعيد قيمة u

$$\frac{3}{4}u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\frac{2}{3}(x^2+6) + c$$

$3)\int \cos x\, e^{\sin x}dx$

الحل

الحل: u=القوة → u=sin x

نجد $dx \quad du = \frac{dx}{\cos x}$

نعوض ونختصر $\int \cancel{\cos x}\, e^u \frac{du}{\cancel{\cos x}}$

نكامل $=\int e^4 du$

$= e^4 + c$

رجع قيمة u $=e^{\sin x} + c$

$4)\int \frac{lnx}{x}dx$

الحل

نفرض u

u=lnx

نجد $dx \quad dx = \frac{du}{\frac{1}{x}} = xdu$

نختصر $\int \frac{u}{\cancel{x}}\cancel{x}\ du$

نكامل $\int u\ du$

$$= \frac{u^2}{2} + c$$

رجع قيمة u $= \frac{lnx}{2} + c$

$5)\int x^4\sin(x^5-8)dx$

الحل

نفرض u: $u=x^5-8$

نجد dx: $dx=\frac{du}{5\times4}$

نعوض

$$\int \cancel{x^4}\sin(4)\frac{du}{5\cancel{x^4}}$$

نكامل $=\int \frac{1}{5}\sin(u)du$

$=\frac{1}{5}\cos 4+c$

رجع قيمة u: $=\frac{1}{5}\cos(x^5-8)+c$

6) $\int \sin 3x \cos x\, dx$

الحل: $=\int(\sin x)^3\cos x$

لاحظ قوة(قوس) ما داخله مشتقته موجودة

افرض أن: u=sin x

جد dx: $dx=\frac{du}{\cos x}$

نعوض ونختصر $\int(u)^3\cos x\frac{du}{\cos x}$

نكامل $=\int u^3\,du$

$=\frac{u^4}{4}+c$

رجع قيمة u: $=\frac{(\sin x)}{4}+c$

$=\frac{1}{4}\sin^4 x+c$

7) $\int x\sqrt{x^2+3}$

الحل $u=x^2+3$

$dx=\frac{du}{2x}$

$\int x\sqrt{4}\frac{du}{2x}$

$=\int\frac{1}{2}\sqrt{4}\,du$

نختصر: $=\int\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}du$

$=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c$

$=\frac{1}{3}(x^2+3)+c$

8) $\int x^4e^{x^{5+2}}dx$

الحل $u=x^2+2$

$dx=\frac{du}{5x^4}$

$\int \cancel{x^4}e^4\frac{du}{5\cancel{x^4}}$

$=\int\frac{1}{5}e^u du$

$=\frac{1}{5}e^u+c$

$=\frac{1}{5}e^{x^{5+2}}+c$

9) $\int(x+1)(x^2+2x+5)^4$

الحل

$u=x^2+2x+5$

$=dx=\frac{du}{2x+2}$

$\rightarrow\int(x+1)(u)^4\frac{du}{2x+2}$ عامل مشترك

$\int(x\cancel{+}1)(u)^4\frac{du}{2(x\cancel{+}1)}$

$=\int\frac{1}{2}u^4du$

$=\frac{1}{2}\frac{u^5}{5}+c$

$=\frac{1}{10}(x^2+2x+5)^5+c$

10) $\int\frac{(Inx)^3}{x}dx$

الحل

الحل: u=lnx

$dx=\frac{du}{\frac{1}{x}}=xdu$

$\rightarrow\int\frac{(u)^3}{x}xdu$

$=\int u^3du$

$=\frac{u^4}{4}+c$

أحلامنا التي لم تحدث في الحياة ربما كانت كوابيساً مزعجة.

11) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$

الحل

الحل: نجهز السؤال

$= \int \cos x\ (\sin x)^{-4} dx$

u=sin x

dx=$\frac{du}{\cos x}$

$\int \cancel{\cos x} (u)^{-4} \frac{du}{\cancel{\cos x}}$

$= \int u^{-4} du$

$= \frac{u^{-3}}{-3} + c$

$= \frac{(\sin x)-3^{-3}}{-3}$+C

$= \frac{-1}{3(\sin^3 x)} + c$

12) $\int \sin x \sqrt{1+3\cos x} dx$

الحل

$u = 1 + 3\cos x$

$dx = \frac{du}{-3\sin x}$

$\rightarrow \int \cancel{\sin x}\ \sqrt{u} \frac{du}{-3\cancel{\sin x}} = \int \frac{-1}{3} u^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{-1}{3} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c\ = -\frac{2}{9}(1+3\cos x)^{\frac{3}{2}} + c$

$= -\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos x)^3} + c$

تحقق من فهمي

a) $\int 6x^2(2x^3-3)^4 dx$

b) $\int x e^{x^2+1} dx$

c) $\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x}} dx$

d) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

e) $\int x^3 \cos(x^4-5) dx$

f) $\int \cos^4 x \sin x\ dx$

من الحياة

1) يمثل الاقتران $p(x)$ سعر حذاء رياضي بالدينار، حيث x عدد الأحذية المبيعة بالمئات إذا كان

$$p'(x) = \frac{-136x}{\sqrt{9+x^2}}$$

هو معدل التغير في سعر الحذاء فأجد $p(x)$ علما أن سعر الحذاء الواحد JP30 عندما يكون عدد الأحذية المبيعة 400 حذاء

الحل

نجد $p(x)$

$$p(x) = \int p'(x)\, dx$$

$$p(x) = \int \frac{-136x}{\sqrt{9+x^2}} dx$$

نكامل بالتعويض $u = 9 + x^2$

$$dx = \frac{du}{2x} \rightarrow \int \frac{-136x}{\sqrt{u}} \frac{du}{2x}$$

$$= \int \frac{-68}{\sqrt{u}} du = \int -68 u^{-\frac{1}{2}} du = -68 u^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -136\sqrt{u} + c$$

$$p(x) = -136\sqrt{9+x^2} + c$$

نجد يمة الثابت c

$$p(u) = 30$$

بما أن x يمثل عدد الأحذية المبيعة فإن العدد 400 في المسألة يعني x=4

$$p(4) = -136\sqrt{9+16} + c$$

$$30 = -136\sqrt{25} + c$$

$$30 = -680 + c \rightarrow \quad c = 710$$

إذاً

$$p(x) = -136\sqrt{9+x^2} + 710$$

2) يمثل الاقتران

$$\mathrm{R}'(x) = 50 + 3.5x\ e^{-0.1x2}$$

الايراد الحدي بالدينار لكل قطعة تباع من انتاج إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المبيعة و $R(x)$ ايراد بيع x قطعة بالدينار، جد اقتران الايراد R(x) علما أن $\mathrm{R}(0) = 0$

الهدف النهائي للحياة هو الفعل وليس العلم، فالعلم بلاعمل لا يساوي شيئاً، نحن نتعلم لكي نعمل

الحل

$$R(x)=\int R'(x)\,dx$$

$$R(x)=\int 50+3.5xe^{-0.1x^2}dx$$

$$u=0.1x^2$$

$$dx=\frac{du}{-0.2x}$$

$$\int 50dx+\int 3.5xe^{u}\frac{du}{-0.2x}$$

$$\to 50x+\int \frac{-3.5}{0.2}e^{u}du$$

$$\to 50x-\frac{3.5}{0.2}e^{u}+c$$

$$\to R(x)=50x-\frac{35}{2}e^{-0.1x2}+c$$

$$R\,(0)=0$$

$$\to 50(0)-\frac{35}{2}e^{0}+c=0$$

$$\to \frac{-35}{2}+c=0$$

$$\to c=\frac{35}{2}$$

$$R(x)=50x-\frac{35}{2}e^{-0.1x2}+\frac{35}{2}$$

3) يمثل الاقتران

$$\grave{f}(x)=2x(4x^2-10)^2$$

ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ المار بالنقطة (2,10)جد قاعدة الاقتران $f(x)$

الحل $f(x)=\int \grave{f}(x)dx$

$$f(x)=\int 2x(4x^2-10)^2dx$$

$$4=4x^2-1$$

$$dx=\frac{du}{8x}$$

$$\to \int 2x(u)^2\frac{du}{8x}$$

$$\to \int 2\,(u)^2du$$

$$=2\frac{u^3}{3}$$

$$f(x)=\frac{2}{3}(4x^2-10)^3+c$$

لإيجاد قيمةc

$$f(2)=10\ c$$

$$f(2)=\frac{2}{3}(4(2)^2-10)^3+c$$

$$f(2)=\frac{2}{3}(6)^3+c=10$$

$$\frac{2}{3}(216)+c=10$$

$$144+c=10\to c=-134$$

$$f(x)=\frac{2}{3}(4x^2-10)^3-134$$

يمثل الاقتران

$$\grave{f}(x)=x^2e^{-0.2x3}$$

صل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ المار بالنقطة $(0,\frac{3}{2})$

جد قاعدة الاقتران $f(x)$

الحل

$$f(x)=\int \grave{f}\,(x)dx$$

$$\to f(x)=\int x^2\,e^{-0.2x3}dx$$

$$u=-0.2\times 3$$

$$dx=\frac{du}{-0.6x^2}$$

إن لم يكن لديك هدف فاجعل هدفك الأول إيجاد واحد

$$\rightarrow \int x^2 e^u \frac{du}{-0.6x^2}$$

$$= \int \frac{-1}{0.6} e^u du$$

$$= \frac{-1}{0.6} e^u + c$$

$$f(x) = \frac{-1}{0.6} e^{-0.2x^3} + c$$

$$f(0) = \frac{3}{2}$$

$$\frac{-1}{0.6} + c = \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow c = \frac{3}{2} + \frac{1}{0.6}$$

$$\rightarrow c = \frac{1.8+2}{0.2}\frac{2.8}{1.2}$$

$$= \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$$

$$f(x) = \frac{-1}{0.6} e^{-0.2x^3} + \frac{7}{3}$$

5) يتحرك جسم في مسار مستقيم وتعطى سرعته بالاقتران:

$$v(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

حيث t الزمن بالثواني وv سرعته بالمتر لكل ثانية إذا بدأ الجسم حركته من نقطة الأصل جد موقعه بعد t ثانية من بدء حركته.

الحل : المطلوب $s(t)$

$$\rightarrow s(t) = \int v(t) dt$$

$$s(t) = \int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt$$

$$u = t^2 + 1$$

$$dt = \frac{du}{2t}$$

$$\rightarrow \int \frac{t}{\sqrt{u}} \frac{du}{2t}$$

$$= \int \frac{1}{2\sqrt{4}} du$$

$$= \int \frac{1}{2} (u)^{-\frac{1}{2}} du$$

$$s(t) = \frac{1}{2} . 2u^{\frac{1}{2}} + c$$

$$s(t) = \sqrt{u} + c$$

لكن نقطة الأصل $s(0) = 0$

$$\rightarrow 0 + c = 0 \ \rightarrow c = 0$$

$$s(t) = \sqrt{u}$$

تحقق من فهمي

يمثل الاقتران $p(x)$ سعر القطعة الواحدة (بالدينار) من منتج معين، حيث x عدد القطع المبيعة (بالمئات) . إذا كان : $p'(x) = \frac{-300x}{\sqrt{(36+x^2)^2}}$ هو معدل التغير في سعر القطعة الواحدة من المنتج، فأجد $p(x)$ ، علماً بأن سعر القطعة الواحدة $74\ JD$ ندما يكون عدد القطع المبيعة 800 قطعة.

الدرس 6

التكامل بالتعويض للتكاملات المحدودة

نفس خطوات التكامل بالتعويض الغير محدود ولكن تضاف خطوة تغيير حدود التكامل بعد الفرض

(ولا نعيد قيمة u)

أمثلة

جد التكاملات الآتية:

$$1)\int_{1}^{2} 4x(x^2+1)dx$$

الحل

1) افرض u : $u = x^2+1$

2) جد dx $dx = \frac{du}{2x}$

3) غير حدود التكامل

$$x = 1 \rightarrow u = (1)^2+1 = 2$$

$$= 5x = 2 \rightarrow u = (2)^2+1$$

$$= \frac{1}{2}(5)^4 - \frac{1}{2}(2)^4 = \frac{625}{2} - \frac{16}{2} = \frac{609}{2}$$

$$= 304.5$$

4) نعوض في التكامل

$$\int_{1}^{2} 4(x)(x^2+1)^2 dx$$

$$\int_{2}^{5} (4x)(u)^3 \frac{du}{2x}$$

$$= \int_{2}^{5} 2u^3 du = \frac{2u^4}{4} = \frac{1}{2}u^4$$

$$2)\int_{0}^{1} (x+1)\sqrt{x^2+2x}dx$$

الحل

$$u = x^2 2x$$

$$dx = \frac{du}{2x+2}$$

نغير الحدود

$$x = 0 \rightarrow u = 2$$

$$x = 1 \rightarrow u = 1+2 = 3$$

$$\rightarrow \int_{0}^{1} (x+1)\sqrt{x^2+2x}\,dx$$

$$= \int_{0}^{3} (x+1)\sqrt{u}\frac{du}{2x+2}$$

$$= \int_{0}^{3} (x+1)(u)^{\frac{1}{2}}\frac{du}{2(x+1)}$$

$$= \int_{0}^{3} \frac{1}{2}(u)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{3}$$

من الحقائق الثابتة أنك تستطيع أن تنجح بسرعة وبأفضل طريقة، عندما تساعد الآخرين على النجاح

$$= \frac{1}{3}\sqrt{u^3}\Big|_0^3$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{3^3}\right) - \left(\frac{1}{3}\sqrt{0^3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{27} - 0$$

$$= \frac{1}{3}.3\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

3) $\int_{-1}^{3} 8xe^{x^2}\,dx$

الحل

$$u = x^2$$

$$dx = \frac{du}{2x}$$

غير الحدود

$$-1 \to 1$$
$$3 \to 9$$

$$\to \int_{-1}^{3} 8xe^{x^2}\,dx$$

$$= \int_{1}^{9} 8x\,e^4 \frac{du}{2x}$$

$$= \int_{1}^{9} 4e^4 du$$

$$= 4e^4\Big|_1^9$$

$$= 4e^9 - 4e = 4(e^9 - e)$$

4) $\int_1^2 \frac{x^2}{(x^3+1)^2}dx$

الحل

$$= \int_{1}^{2} x^2(x^3+1)^{-2}\,dx$$

$$u = x^3 + 1$$

$$dx = \frac{du}{3x^2}$$

نغير الحدود

$$1 \to 2$$
$$2 \to 9$$

$$\int_{1}^{2} x^2(x^2+1)^{-2}\,dx$$

$$= \int_{2}^{9} x^2(u)^{-2}\frac{du}{3x^2}$$

$$= \int_{2}^{9} \frac{1}{3}u^{-2}du$$

$$= \frac{1}{3}\frac{u^{-1}}{-1}\Big|_2^9$$

$$= \frac{-1}{3u}\Big|_2^9$$

$$= \left(\frac{-1}{27} - \left(\frac{-1}{6}\right)\right)$$

$$= \frac{-1}{27} + \frac{1}{6} = \frac{-6+27}{162} = \frac{21}{162}$$

5) $\int_{e}^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x}dx$

الحل

$$u = \ln x$$

$$dx = \frac{du}{\frac{1}{x}} = x\,du$$

نغير الحدود

$$e \to \ln e = 1$$
$$e^2 \to \ln e^2 = 2$$

نعوّض

$$\to \int_{1}^{2} \frac{(u)^2}{x}x\,du = \int_{1}^{2} u^2\,du$$

$$= \frac{u^3}{3}\Big|_1^2$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

تمرين أتحقق من فهمي

جد التكاملات الآتية

$$a)\ \int_{0}^{1} x^2(x^3-1)^4 dx$$

$$b)\ \int_{-1}^{0} \frac{x^3}{(2-x^4)^7} dx$$

$$c)\ \int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x} dx$$

$$d)\ \int_{0}^{1} x\sqrt{3x^2+2}\, dx$$

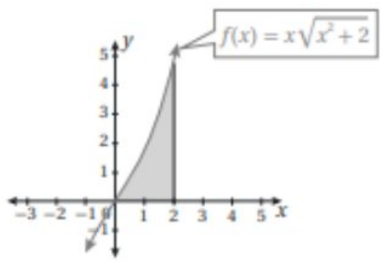
$$e)\ \int_{0}^{1} (x+1)(x^2+2x)^5 dx$$

الدرس 6

إيجاد المساحة من التكامل بالتعويض

مثال1:

جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور



$$f(x) = x\sqrt{x^2+2}$$

الحل

$$A = \int_{0}^{2} f(x)dx$$

$$= \int_{0}^{2} x\sqrt{x^2+2}\, dx$$

$$u = x^2+2$$

$$dx = \frac{du}{2x}$$

$$0 \to 2 \quad /2 \to 6$$

$$\int_{0}^{2} x\sqrt{x^2+2}\, dx$$

$$= \int_{2}^{6} x\sqrt{u}\,\frac{du}{2x}$$

$$= \int_{2}^{6} \frac{1}{2}\sqrt{u}\, du$$

$$\int_{2}^{6} \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{2}^{6}$$

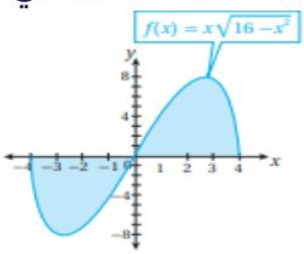
$$= \frac{1}{3}\sqrt{u^3}\Big|_{2}^{6}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\sqrt{216}\right) - \left(\frac{1}{3}\sqrt{8}\right)$$

$$= \frac{1}{3}(\sqrt{216}-\sqrt{8})$$

مثال2:

جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل الأتي :



الحل

$$A=-\int_{-4}^{0} x\sqrt{16-x^2}\,dx+\int_{0}^{4} x\sqrt{16-x^2}\,dx$$

نحل التكامل بالتعويض

$$u=16-x^2$$

$$dx=\frac{du}{-2x}$$

$$-4\to 0 \qquad /0\to 16$$
$$4\to 0$$

$$\to A=-\int_{-4}^{0} x\sqrt{(16-x^2)}dx+\int_{0}^{4} x\sqrt{16-x^2}dx$$

$$=-\int_{0}^{16} x\sqrt{u}\frac{du}{-2x}+\int_{16}^{0} x\sqrt{u}\frac{du}{-2x}$$

$$=-\int_{0}^{16}\frac{-1}{2}\sqrt{u}\,du+\int_{16}^{0}\frac{-1}{2}\sqrt{u}\,du$$

$$=-\int_{0}^{16}\frac{-1}{2}u^{\frac{1}{2}}du+\int_{16}^{0}\frac{-1}{2}(u)^{\frac{1}{2}}du$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{16}+\frac{-1}{2}.\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{16}^{0}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{u^3}\Big|_{0}^{16}+\frac{-1}{3}\sqrt{u^3}\Big|_{16}^{0}$$

$$=\left(\frac{1}{3}(64)-0\right)+\left(0-\left(\frac{-1}{3}(64)\right)\right)$$

$$\frac{64}{3}+\frac{64}{3}=\frac{128}{3}$$

أسئلة قوة

نار شرار

جد التكاملات الأتية :

1) $\int\frac{1}{x\ln x}dx$

الحل

$$u=\ln x$$
$$dx=\frac{du}{\frac{1}{x}}=x\,du$$
$$\to\int\frac{1}{x\,u}x\,du$$
$$=\int\frac{1}{u}du$$
$$=\ln u+c$$
$$=\ln|\ln x|+c$$

2) $\int sin^5 2x\ \cos 2x\ dx$

الحل

$$=\int(\sin 2x)^5\cos 2x$$
$$u=\sin 2x$$
$$dx=\frac{du}{2\cos 2x}$$
$$\int(u)^5\cos 2x.\frac{du}{2\cos 2x}$$
$$=\int\frac{1}{2}(u)^5du$$
$$=\frac{1}{2}\frac{u^0}{6}+c$$
$$=\frac{1}{12}(\sin 2x)^6+c$$

$$3)\ \int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx$$

الحل

$$u = \frac{1}{x}$$

$$dx = \frac{du}{\frac{-1}{x^2}} = -x^2\,du$$

$$\to \int \frac{\sin(u)}{x^2}.-x^2\,du$$

$$= \int \sin(u)\,du$$

$$= -\cos u + c$$

$$= -\cos\left(\frac{1}{x}\right) + c$$

تحدٍ: إذا كان $\int_0^k k\,x^2\,e^{x^3}\,dx = \frac{2}{3}(e^8-1)$ جد قيمة الثابت k

الحل

نكامل بالتعويض

$$u = x^3$$

$$dx = \frac{du}{3x^2}$$

نغير الحدود

$0 \to 0$

$k \to k^3$

$$\to \int_0^{k^3} k\,x^2\,e^u \frac{du}{3x^2}$$

$$\int_0^{k^3} \frac{k}{3}\,e^u\,du$$

$$= \frac{k}{3}e^u\Big|_0^{k^3} = e^8 - 1$$

$$\frac{k}{3}e^{k^3} - \frac{k}{3}e^0 = \frac{2}{3}(e^8-1)$$

$$\frac{k}{3}e^{k^3} - \frac{k}{3} = \frac{2}{3}(e^8-1)$$

$$\frac{k}{3}(e^{k^3}-1) = \frac{2}{3}(e^8-1)$$

$$\sqrt[3]{k^3} = \sqrt[3]{8} \to k = 2$$

أتدرب وأحل مسائل

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$

2) $\int x^2(2x^3+5)^4dx$

3) $\int 3x\sqrt{x^2+7}dx$

4) $\int x^6e^{1-x^7}dx$

5) $\int \frac{x^4}{(x^4+9)^3}dx$

6) $\int (3x^2-1)e^{x^3-x}dx$

7) $\int \frac{3x-3}{\sqrt{x^2-2x+4}}dx$

8) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

9) $\int \sin x\,(1+\cos x)^4dx$

10) $\int \sin^5 2x\cos 2x\,dx$

11) $\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx$

12) $\int \frac{\cos x}{e^{\sin x}}\,dx$

13) $\int e^x(2+e^x)dx$

14) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$

15) $\int (3x^2-2x-1)(x^3-x^2-x)^4dx$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

16) $\int_0^2 (2x-1)e^{x^2-x}\,dx$

17) $\int_1^2 \frac{e^{1/2}}{x^2}\,dx$

18) $\int_{e}^{e^3} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

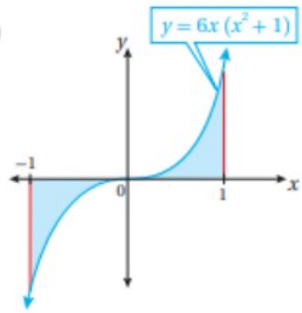
19) $\int_{0}^{1} (x^3 + x)\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1)}\, dx$

20) $\int_{0}^{3} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$

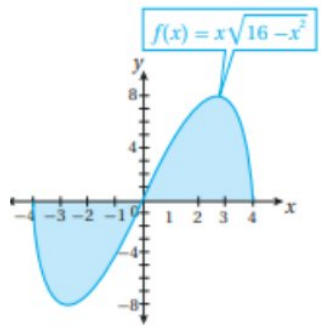
21) $\int_{1}^{2} \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 4)^3} dx$

أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلين الآتيين:

22)



23)



في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمر بها منحني $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$.

24) $f'(x) = xe^{4-x^4}$; $(-2,1)$

25) $f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$; $(0,-1)$

26) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران :

$$v(x) = \frac{-2t}{\sqrt{(1+t^2)^2}}$$

حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم $4m$ فأجد موقع الجسيم بعد t ثانية من بدء الحركة.

27) زراعة: يمثل الاقتران $V(t)$ سعر دونم أرض زراعية في الأغوار الأردنية (بالدينار) بعد t سنة من الآن. إذا كان $V'(t) = \frac{0.4t^3}{\sqrt[3]{0.2t^4+8000}}$ ، هو معدل التغير في سعر دونم الأرض، فأجد $V(t)$ علماً بأن سعره الأن $5000\, JD$

28) سكان: أشارت دراسة إلى أن عدد السكان في إحدى المدن يتغير سنوياً بمعدل يمكن نمذجته بالاقتران: $p'(t) = \frac{4e^{0.2t}}{\sqrt{4+e^{0.2t}}}$، حيث t عدد السنوات منذ 2015 م ، و $p(t)$ عدد السكان بالآلاف. أجد مقدار الزيادة في عدد سكان المدينة من عام 2015م الى عام 2025م.

مهارات التفكير العليا

29) أكتشف المختلف: أي التكاملات الآتية مختلف، مبرراً إجابتي؟

$\int \frac{2x+3}{(x^2+3x)^2} dx$, $\int 3x^2 e^{1+x^3} dx$

$\int x \cos x^2\, dx$, $\int x(x^3+1) dx$

30) أكتشف الخطأ: أوجدت سعاد ناتج التكامل : $\int_0^1 8x(x^2+1)^3 dx$، وكان حلها على النحو الآتي:

$$\int_0^1 8x(x^2+1)^3 dx = \int_0^1 8x \times u^3 \times \frac{du}{2x}$$

$$\int_0^1 4u^3\, du = u^4 |_0^1 = 1$$

أكتشف الخطأ في حل سعاد، ثم أصححه.

31) تحدٍّ: إذا كان:

$$\int_0^k kx^2 e^{x^3} dx = \frac{2}{3}(e^8 - 1)$$

فأجد قيمة الثابت k

اختبار نهاية الوحدة

اختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) قيمة: $\int \frac{x^3-1}{x^2} dx$ هي:

$a) \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + c$

$b) \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + c$

$c) x^2 - \frac{1}{x} + c$

$d) x^2 + \frac{1}{x} + c$

2) إذا كان $\int_0^2 kx dx = 6$ ، فإن قيمة الثابت k هي:

$a) 1$

$b) 2$

$c) 3$

$d)\ 4$

3) قيمة : $\int_0^3 (-x^2+3x) dx$ ، هي:

$a) 3\frac{3}{4}$

$b) 21\frac{1}{4}$

$c) 4\frac{1}{2}$

$d)\ 22\frac{1}{2}$

إذا لم تستطع لأن تفعل أشياء عظيمة، افعل أشياء صغيرة، بطرق عظيمة.

4) قيمة : $\int_0^2 e^{2x}dx$ هي:

$a) e^4-1$

$b) e^4-2$

$c) 2e^4-2$

$d) \frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}$

5) قيمة : $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}$ هي:

$a) -2$

$b) -\frac{7}{16}$

$c) \frac{1}{2}$

$d) 2$

6) التكامل المحدود الذي يمكن عن طريقه ايجاد المساحة بين منحني الاقتران : $f(x)=4x-x^2$ ، والمحور x.

$a) \int_4^0 (4x-x^2)dx$

$b) \int_0^4 (4x-x^2)dx$

$c) \int_1^0 (4x-x^2)dx$

$d) \int_0^1 (4x-x^2)dx$

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

7) $\int 3x^{-\frac{1}{2}}dx$

8) $\int (8x-10x^2)dx$

9) $\int \frac{5}{x^2}dx$

10) $\int \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}}dx$

11) $\int (5x^2-2e^{7x})dx$

12) $\int (2x+3e^{4x+5})dx$

13) $\int \frac{x^2-6}{2x}dx$

14) $\int \frac{1}{(x-1)^3}dx$

15) $\int \frac{e^x}{e^x+4}dx$

16) $\int 2xe^{x^2-1}dx$

17) $\int 4e^x(3+e^{2x})dx$

18) $\int \frac{1+x}{(4+2x+x^2)^8}$

19) $\int x\sin(3+x^2)dx$

20) $\int (3\sin 3x-4\cos x)dx$

21) $\int (x-\sin(7x-2))dx$

22) $\int (e^{3x}-e^{-3x})dx$

23) $\int \frac{2}{1-5x}dx$

عندما يبدو لك تحقيق الهدف محالاً، لا تغيره بل غير طريقة عملك لتحقيقه.

24) إذا كان ميل المماس لمنحني العلاقة y هو:

$$\frac{dy}{dx}=4x-2$$

فأجد قاعدة العلاقة y ، علماً بأن منحناها يمر بالنقطة $(0,3)$.

25) الايراد الحدي: يمثل الاقتران

$$R'(x)=4x-1.2x^2$$

الايراد الحدي (بالدينار)لكل قطعة تباع في احدى الشركات، حيث x عدد القطع المبيعة ، و $R(x)$ ايراد بيع x قطعة بالدينار, أجد اقتران الايراد $R(x)$، علماً بأن $R(20)=30000$.

26) يتحرك جسيم من السكون ويعطى تسارعه بالاقتران :

$$a(t)=\cos(3t-\pi)$$

حيث t الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. أجد سرعة الجسيم بعد t ثانية من بدء الحركة.

إذا كان

$$\int_{-5}^{-1} f(x)\,dx=4,\int_{-5}^{5} f(x)\,dx=10$$

$$\int_{-5}^{1} g(x)\,dx=11$$

أجد كلاً مما يأتي:

27) $\int_{-1}^{5} f(x)dx$ 28) $\int_{-5}^{1} 7f(x)dx$

29) $\int_{-5}^{5} (3f(x)-g(x))dx$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

30) $\int_{-2}^{3} (3x^2-4x+1)dx$

31) $\int_{1}^{3} \frac{x^3+2x^2}{x}dx$

32) $\int_{1}^{5} |3-x|dx$

33) $\int_{1}^{4} \frac{20}{\sqrt{x}}dx$

34) $\int_{2}^{5} 3x(x+2)dx$

35) $\int_{2}^{3} 2xe^{-x^2}dx$

36) $\int_{0}^{2} \frac{3x^2}{(x^3+1)^5}dx$

37) $\int_{0}^{1} \frac{6x}{x^2+1}dx$

38) إذا كان

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4 & ,x<0 \\ 4-x & , \quad x\ge 0 \end{cases}$$

$$\int_{-2}^{1} f(x)dx$$

39) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجة بالاقتران : $v(t)=5+e^{t-2}$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية، إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الاصل، فأجد موقعه بعد 3 ثواني من بدء الحركة.

الأهم من أن تتقدم بسرعة هو أن تتقدم في الاتجاه الصحيح

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ، ونقطة يمر بها منحني $y =$ $f(x)$ أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$.

40) $f'(x) = 3x^2 + 6x - 2\ ; (0,6)$

41) $f'(x) = \dfrac{\sqrt{20}}{x^2}; (1,400)$

42) $f'(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}; (1,1)$

43) $f'(x) = 5e^x - 4\ ; (0,-1)$

44) $f'(x) = x\sqrt{x^2 + 5}\ ; (2,10)$

45) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الاقتران :

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

والمحور x ، والمستقيمين: $x = -2$ و $x = 1$

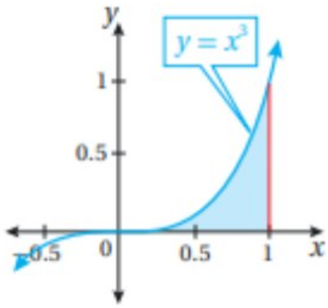
46) طب: يمثل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t ساعة من حقته في جسم مريض، حيث C بالميليغرام لكل سنتيمتر مكعب (mg/cm^3) إذا كان تركيز الدواء في دم المريض يتغير بمعدل : $C'(t) = \frac{3t}{\sqrt{(t^2+36)^3}}$، فأجد مقدار التغير في تركيز الدواء في الدم خلال الساعات الثماني الأولى التي تلت حقنه في جسم المريض

47) اجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الاقتران :

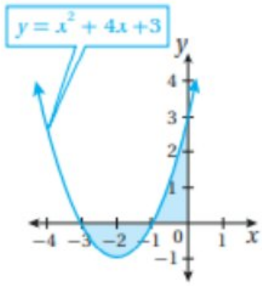
$f(x) = 3x^2 - 3x$، والمحور x.

أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلات البيانية الآتية.

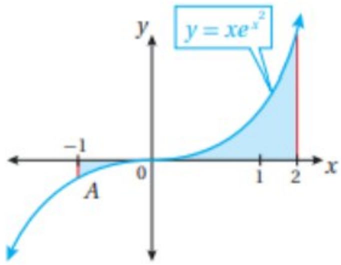
49)



50)



51)



تتضمن الدوسية

- شرح مفصل ومبسط للمادة
- أمثلة محلولة على جميع الأفكار بطريقة متسلسلة
- أسئلة الكتاب لكل درس وإجاباتها النهائية
- أسئلة قوة ومهارات عليا لكل درس مع الشرح

أ. بلال أبو دريّع