

b)  $f(x) = e^x \sin x$

c)  $f(x) = x^7 \ln x$

d)  $f(x) = \frac{x}{x+4}$

6 جد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي عند قيمة  $x$  المعطاة:

a)  $f(x) = 1 - 7x^2$  ,  $x = -3$

b)  $f(x) = \frac{1}{2x-4}$  ,  $x = 3$

7 إذا كان:  $f(x) = ax^4 - 3x^2$ ، وكانت  $f''(2) = 42$ ، فجد قيمة  $a$ .

8 يمكن نمذجة موقع سيارة تتحرك في مسار مستقيم باستخدام:  $s(t) = 6t^2 - 2t$ ، حيث  $t$  الزمن بالثواني، و  $s$  الموضع بالأمتار:

- a) ما السرعة المتجهة للسيارة بعد 5 ثوانٍ من بدء الحركة؟  
 b) ما تسارع السيارة بعد 5 ثوانٍ من بدء حركتها؟  
 c) جد قيمة  $t$  التي تكون عندها السيارة في حالة سكون.

9 استعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للإقتران:

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$$

الوحدة الثانية : تطبيقات التفاضل

1 جد معادلة المماس لمنحنى كل إقتران مما يأتي عند النقطة المعطاة:

a)  $f(x) = x^3 - 6x + 3$  ,  $(2, -1)$

b)  $f(x) = x^2 - \frac{8}{\sqrt{x}}$  ,  $(4, 12)$

c)  $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x+11}}$  ,  $x = 5$

2 جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى كل اقتران مما يأتي عند قيمة  $x$ : المعطاة:

$$f(x) = 2x^2(6 - x)$$
 ,  $x = 5$

3 جد إحداثي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران:  $f(x) = 20x^3 - 3$  التي يكون عندها المماس أفقيًا.

4 جد إحداثي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران  $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 10x$  التي يكون عندها ميل المماس 6.

5 جد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي:

a)  $f(x) = 2 \cos x - x^3$



(b) جد اقتران الربح.

(c) جد عدد القطع اللازم بيعها من المنتج لتحقيق أكبر ربح ممكن، ثم جد أكبر ربح ممكن.

(d) جد سعر الوحدة الواحدة من المنتج الذي يحقق أكبر ربح ممكن.

14 جد  $\frac{dy}{dx}$  لكل مما يأتي:

a)  $y \ln x = 1 + x$

b)  $x e^x - 3x = 15$

c)  $y + y^3 = \sin x - x^2$

d)  $x^2 y - 2x^3 - y^3 + 1 = 0$  , (2, -3)

e)  $y^3 - x^2 = 4$  , (2, 2)

15 إذا كان:  $y^2 - x^2 = k$ ، فجد ما يلي:

(a) ميل المماس عند النقطة (3, 5).

(b) معادلة المماس عند النقطة (3, 5).

16 يزداد نصف قطر فقاعة صابون كروية الشكل

بمعدل  $0.5 \text{ cm/s}$ . جد سرعة زيادة مساحة سطح

الفقاعة عندما يكون طول نصف قطرها  $3 \text{ cm}$ ، علمًا

بأن العلاقة التي تربط بين مساحة سطح الفقاعة (A)

ونصف قطرها (r) هي:  $A = 4\pi r^2$ .

10 خطط مزارع لتسييج حضيرة مستطيلة الشكل

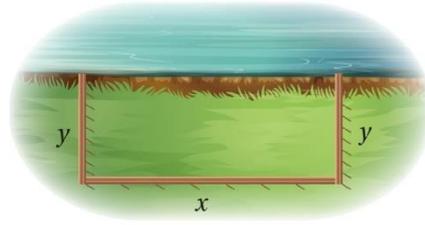
قرب نهر، و حدّد مساحة الحضيرة بـ

$245000 \text{ m}^2$ ، لتوفير كمية عشب كافية

لأغنامه، جد أبعاد الحضيرة التي تجعل طول

السياج أقل ما يمكن. علمًا بأن الجزء المقابل للنهر

لا يحتاج إلى تسييج.



11 لدى حدّاد صفيحة معدنية مساحتها  $54 \text{ m}^2$ .

أراد الحدّاد أن يصنع منها خزّان ماء على شكل متوازي

مستطيلات مغلق، وأن يكون الخزّان مفتوحًا من

الأعلى، جد أبعاد الخزّان التي تجعل حجمه أكبر ما

يمكن.

12 لدى حدّاد صفيحة معدنية مساحتها  $36 \text{ m}^2$ .

أراد الحدّاد أن يصنع منها خزان ماء على شكل متوازي

مستطيلات مغلق، وأن تكون قاعدة الخزان مربعة

الشكل. جد أبعاد الخزّان التي تجعل حجمه أكبر ما

يمكن.

13 يمثل الاقتران:  $P(x) = 500 - 0.002x$

سعر منتج لإحدى الشركات، حيث  $x$  عدد القطع

المنتجة. ويمثّل الاقتران:  $C(x) = 300 + 1.10x$

تكلفة إنتاج  $x$  قطعة:

(a) جد اقتران الإيراد.



« الوحدة الثالثة : تطبيقات التفاضل »

1a)  $F(x) = x^3 - 6x + 3$  ,  $(2, -1)$   
 $x = 2$   
 $y = -1$

$m = 3x^2 - 6 = 3(2)^2 - 6 = 6$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - (-1) = 6(x - 2) \rightarrow y = 6x - 13$

b)  $F(x) = x^2 - 8(x)^{-1/2}$   $(4, 2)$

$x = 4$

$y = 12$

$m = 2x - 8 * \frac{-3}{2} x^{-3/2}$

$= 2x + \frac{4}{\sqrt{x^3}} = 2(4) + \frac{4}{\sqrt{(4)^3}}$

$= 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 12 = \frac{17}{2}(x - 4)$

c)  $F(x) = \frac{8}{\sqrt{x+11}}$  ,  $x = 5$

$F(x) = 8(x+11)^{-1/2}$

$x = 5$        $y = \frac{8}{\sqrt{5+11}} = 2$

$m = 8 * \frac{-1}{2} (x+11)^{-3/2} = \frac{-4}{\sqrt{(x+11)^3}}$   
 $= \frac{-1}{16}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = \frac{-1}{16}(x - 5)$

$y = \frac{-1}{16}x + \frac{37}{16}$

2)  $F(x) = 2x^2(6-x)$   
 $= 12x^2 - 2x^3$

$x = 5$

$y = 12(5)^2 - 2(5)^3 = 300 - 250 = 50$

$m = 24x - 6x^2$

$m_{عوضي} = 24(5) - 6(5)^2 = -30$

$m_{عوضي} = \frac{1}{30}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 50 = \frac{1}{30}(x - 5)$

3)  $F(x) = 20x^3 - 3x^5$

مماسي أفقي

$m = 0$

$F'(x) = 60x^2 - 15x^4 = 0$

$= 15x^2(4 - x^2) = 0$

$x = 0$

$x = \pm 2$

$F(0) = 0$

$F(-2) = -64$

$F(2) = 64$

(1)

$$4] f(x) = \frac{1}{5} x^5 - 10x$$

$$f'(x) = x^4 - 10 = 6$$

$$\sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{16}$$

$$x = \pm 2$$

$$f(-2) = \frac{1}{5} (-2)^5 - 10(-2) = \frac{68}{5}$$

$$f(2) = \frac{1}{5} (2)^5 - 10(2) = \frac{-68}{5}$$

النقاط  
النقط  $(-2, \frac{68}{5}), (2, \frac{-68}{5})$

$$5] a] f(x) = 2 \cos x - x^3$$

$$f'(x) = -2 \sin x - 3x^2$$

$$f''(x) = -2 \cos x - 6x$$

$$b] f(x) = e^x \sin x$$

$$f'(x) = (e^x)(\sin x) + (\cos x)(e^x)$$

$$f''(x) = (e^x)(\sin x)(\cos x)(e^x) + (-\sin x)(e^x) + (e^x)(\cos x)$$

$$f''(x) = 2e^x \cos x$$

$$c] f(x) = x^7 \ln x$$

$$f'(x) = (7x^6)(\ln x) + (\frac{1}{x})(x^7)$$

$$f'(x) = 7x^6 \ln x + x^6$$

$$f''(x) = 42x^5 \ln x + (\frac{1}{x})(7x^6) + 6x^5$$

$$f''(x) = 42x^5 \ln x + 7x^5 + 6x^5$$

$$f''(x) = 42x^5 \ln x + 13x^5$$

$$d] f(x) = \frac{x}{x+4}$$

$$f(x) = x(x+4)^{-1}$$

$$f'(x) = (1)(x+4)^{-1} + (-1)(x+4)^{-2}(1)(x)$$

$$f'(x) = (x+4)^{-1} - x(x+4)^{-2}$$

$$f''(x) = (-1)(x+4)^{-2}(1) - \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{(x+4)^2} \right)$$

$$(1)(x+4)^{-2} + (-2)(x+4)^{-3}(1)(x)$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(x+4)^2} - \left( \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{2x}{(x+4)^3} \right)$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(x+4)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{2x}{(x+4)^3}$$

$$= \frac{-2}{(x+4)^2} - \frac{2x}{(x+4)^3}$$

$$= \frac{-8}{(x+4)^3}$$

$$6] a] f(x) = 1 - 7x^2, x = -3$$

$$f'(x) = -14x^2$$

$$f''(x) = -28x$$

$$f''(-3) = -28(-3) = 84$$

(2)

$$6] F(x) = \frac{1}{2x-4}, \quad x=3$$

$$F(x) = (2x-4)^{-1}$$

$$F'(x) = -1(2x-4)^{-2} (2)$$

$$F''(x) = 4(2x-4)^{-3} (2)$$

$$F''(3) = \frac{8}{(2 \cdot 3 - 4)^3} = \frac{8}{8} = 1$$

$$7] F(x) = ax^4 - 3x^2$$

$$F'(x) = 4ax^3 - 6x$$

$$F''(x) = 12ax^2 - 6$$

$$\rightarrow 12a(2)^2 - 6 = 42$$

$$48a = 48$$

$$a = 1$$

$$8] s(t) = 6t^2 - 2t$$

$$v(t) = 12t - 2$$

$$a(t) = 12$$

$$a] v(5) = 12 \cdot 5 - 2 = 58 \text{ m/s}$$

$$b] a(5) = 12 \text{ m/s}^2$$

$$c] v(t) = 0 \rightarrow 12t - 2 = 0$$

$$12t = 2$$

$$\rightarrow t = \frac{1}{6}$$

$$9] F(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$$

$$F'(x) = 3x^2 - 10x + 3$$

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$(x - \frac{9}{3})(3x - 1) = 0$$

$$(x - 3)(3x - 1) = 0$$

$$x = 3$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$F''(x) = 6x - 10$$

$$F''(3) = 6 \cdot 3 - 10 = 8 > 0$$

\* يوجد قيمة عظمى محلية عند

$$F(3) = -8 \quad x = 3 \text{ وقيمتها}$$

$$F''(\frac{1}{3}) = 6 \cdot \frac{1}{3} - 10 = -8$$

\* يوجد قيمة عظمى محلية عند  $x = \frac{1}{3}$

$$F(\frac{1}{3}) = \frac{40}{27} \text{ وقيمتها}$$

$$8] s(t) = 6t^2 - 2t$$

$$v(t) = 12t - 2$$

$$a(t) = 12$$

$$a] v(5) = 12 \cdot 5 - 2 = 58 \text{ m/s}$$

$$b] a(5) = 12 \text{ m/s}^2$$

$$c] v(t) = 0 \rightarrow 12t - 2 = 0$$

$$12t = 2$$

$$\rightarrow t = \frac{1}{6}$$

$$10] A = x \cdot y \quad P = x + 2y$$

$$245000 = x \cdot y$$

$$y = \frac{245000}{x}$$

$$P = x + 2 \left( \frac{245000}{x} \right)$$

$$P = x + \frac{490000}{x}$$

$$P' = 1 + \frac{-490000}{x^2} = 0$$

$$1 = \frac{490000}{x^2} \rightarrow x^2 = 490000$$

السالب تهمل  $x = \pm 700$

$$y = \frac{245000}{x} = \frac{245000}{700} = 350$$

$$P'' = \frac{980000}{x^3} = \frac{980000}{x^2}$$

$$P''(700) = \frac{980000}{(700)^3} = 2$$

يوجد قيمة عظمى محلية عند  $x = 2$

(3)

$$11) V = x^2 h$$

$$A = 4xh + x^2$$

$$54 = 4xh + x^2$$

$$54 - x^2 = 4xh$$

$$h = \frac{54 - x^2}{4x}$$

$$V = x^2 \cdot h \rightarrow x^2 \left( \frac{54 - x^2}{4x} \right)$$

$$V = \frac{54x - x^3}{4}$$

$$V' = \frac{54 - 3x^2}{4} = 0$$

$$54 - 3x^2 = 0 \rightarrow \frac{54}{3} = \frac{3x^2}{3}$$

$$x^2 = 18 \rightarrow x = \sqrt{18}$$

$$h = \frac{54 - (\sqrt{18})^2}{4\sqrt{18}} = \frac{9}{\sqrt{18}}$$

$$V'' = \frac{-6}{4} x$$

$$V''(\sqrt{18}) = \frac{-6}{4} \sqrt{18}$$

$x = \sqrt{18}$  يوجد قيمة عظمى عند

المطلوب زجاجة

$$12) A = 4xh + 2x^2$$

$$V = x^2 h$$

$$36 = 4xh + 2x^2$$

$$36 - 2x^2 = 4xh$$

$$h = \frac{36 - 2x^2}{4x}$$

$$V = \frac{36x - 2x^3}{4}$$

السكلة  
→

(4)

$$V' = \frac{36 - 6x^2}{4} = 0$$

$$36 - 6x^2 = 0$$

$$x^2 = 6 \rightarrow x = \sqrt{6}$$

$$h = \frac{36 - 2(\sqrt{6})^2}{4\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \text{ m}$$

$$V'' = \frac{-12x}{4} = -3x = -3\sqrt{6}$$

يوجد قيمة عظمى عظمى عند  $x = \sqrt{6}$

$$13) P(x) = 500 - 0.002x$$

$$a) R(x) = 500x - 0.002x^2$$

$$b) P(x) = R(x) - c(x)$$

$$P(x) = (500x - 0.002x^2) - (300 + 1.10x)$$

$$= 500x - 0.002x^2 - 300 - 1.1x$$

$$= 498.9x - 0.002x^2 - 300$$

$$P'(x) = 498.9 - 0.004x$$

$$c) P'(x) = 498.9 - 0.004x = 0$$

$$498.9 = 0.004x$$

$$x = 124725$$

توجد قيمة حرجة عند  $x = 124725$

$$P''(x) = -0.004$$

توجد قيمة عظمى

$$P(124725) = 31112351$$

$$d) P(124725) =$$

$$500 - 0.002(124725)$$

$$= 250.55$$

للأرقام مشا  
همة لا تحاف

$$14) a) y \ln x = 1 + x$$

$$(1y')( \ln x) + \left(\frac{1}{x}\right)(y) = 0 + 1$$

$$y' \ln(x) + \frac{y}{x} = 1$$

$$y' \ln x = 1 - \frac{y}{x}$$

$$y' = \frac{1 - \frac{y}{x}}{\ln x} \rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x \ln x}$$

$$e) y^3 - x^2 = 4$$

$$3y^2 y' - 2x = 0 \quad (2, 2)$$

$$3(4) y' - 2x = 0$$

$$12 y' = 4 \rightarrow y' = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$15) y^2 \cdot x^2 = k$$

$$a) 2y y' - 2x = 0 \quad (3, 5)$$

$$2 * 5 y' - 2 * 3 = 0$$

$$10 y' - 6 = 0$$

$$m = \frac{dy}{dx} = y' = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$b) x e^y - 3x = 15$$

عدل السؤال

$$(1)(e^y) + (y' e^y)(x) - 3 = 0$$

$$e^y + y' x e^y = 3$$

$$y' x e^y = 3 - e^y$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3 - e^y}{x e^y}$$

$$c) y + y^3 = \sin x - x^2$$

$$1y' + 3y^2 y' = \cos x - 2x$$

$$y'(1 + 3y^2) = \cos x - 2x$$

$$y' = \frac{\cos x - 2x}{1 + 3y^2}$$

$$b) x = 3 \quad y = 5 \quad m = \frac{3}{5}$$

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

$$(y - 5) = \frac{3}{5}(x - 3)$$

$$y - 5 = \frac{3}{5}x - \frac{9}{5}$$

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{16}{5}$$

$$16) A = 4\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 4 * \pi * 2 * r * \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi * 3 * \frac{1}{2}$$

$$\frac{dA}{dt} = 12\pi$$

التوضيح جميعاً  
أحواكم  
Pinto

P. عبدالرحمن قنبر

(5)