

الأساس في الرياضيات أدبي

الوحدة الثانية:
التفاضل

الأستاذ

فهد السلامة

00962 790 943 489

فهد السلامة

توجيهي

قواعد الاشتقاق

① مشتقة الثابت

$$f(x) = a$$

$$f'(x) = 0$$

$$c) f(x) = \frac{1}{x^5}$$

$$f'(x) = x^{-5}$$

$$d) f(x) = 2x^4$$

$$f'(x) = 8x^3$$

$$e) f(x) = -4x^{-6}$$

$$f'(x) = 24x^{-7}$$

$$f) f(x) = \sqrt{x}$$

$$= x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$g) f(x) = x^{\frac{5}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^{3/2}$$

③ مشتقة الجمع أو الطرح

$$1) y = x^2 + 4\sqrt{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 4 \times \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2x + 2x^{-\frac{1}{2}}$$

$$a) f(x) = 42$$

$$f'(x) = 0$$

$$b) f(x) = \sqrt{0}$$

$$f'(x) = 0$$

$$c) f(x) = \frac{1}{5}$$

$$f'(x) = 0$$

② مشتقة اقتران القوة

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = n x^{n-1}$$

$$a) f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$b) f(x) = x$$

$$f'(x) = 1$$

بالطبع ستتعب ..
لوكان النجاح سهلا لوصل إليه الجميع

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{4}{x}$$

$$\begin{aligned} 2) y &= \frac{2 - 4x}{x} \\ y &= \frac{2}{x} - \frac{4x}{x} \\ y &= 2x^{-1} - 4 \\ \frac{dy}{dx} &= -2x^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) y &= \sqrt[4]{x^3} - 6/x^3 \\ y &= x^{\frac{3}{4}} - 6x^{-3} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{3}{4} x^{-1/4} + 18 x^{-4} \end{aligned}$$

اختبر نفسك :



$$y = \frac{x^6 - 2x^4 + 4x^2}{2x^2}$$

الدرس الأول - قاعدة السلسلة

$$2) y = (x^4 + 6x)^3$$

الحل : ☒

$$3) y = \sqrt{4 - 3x}$$

الحل : ☒

$$4) y = (x^2 - 2)^4$$

الحل : ☒

إذا كان $f(x)$, $g(x)$ اقتراين قابلين
للإشتقاق فمشتقة الإقتران المركب

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

هي :

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

وإذا كان $g(x) = u$, $f(u) = y$

فإن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

مثال

جد مشتقة كل مما يأتي :

$$1) y = (x^2 + 1)^3$$

$$u = x^2 + 1$$

نفرض

$$y = u^3$$

فتصبح

$$\Rightarrow \frac{dy}{du} = 3u^2$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= 3u^2 \times 2x$$

$$= 6x(x^2 + 1)$$

2) $f(x) = \sqrt{1+x^3}$, $x = 2$

العلم نور والجهل ظلام

قاعدة الجذر التربيعي

$$(\sqrt{g(x)})' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

3) $f(x) = \sqrt{26x - 3x^3}$

4) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$, $x = 2$

اختبر نفسك :



$y = \sqrt{x^3 + 4x}$

قاعدة سلسلة القوة

- إذا كان n عدد حقيقي وكان $g(x)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق فإن :

$$\frac{d}{dx}(g(x))^n = n(g(x))^{n-1} \times g'(x)$$

اسئلة :



☆ جد مشتقة كل مما يأتي عند قيم x المعطاة.

1) $f(x) = (2x^4 - x)^3$, $x = 1$

$f'(x) = (2x^4 - x)^2 \times (8x - 1)$

$f'(1) = 21$

$$11) f(x) = \sqrt[3]{2x-1} - (x-3)^3$$

معدل التغير

المشتقة تعني معدل التغير

مثلاً :

$\frac{dy}{dx}$ تعني معدل تغير y بالنسبة لـ x

اسئلة :

$y = x^3 + 2x^2$ احسب معدل تغير y
بالنسبة لـ x عندما $x = 2$:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(4) + 4(2) = 20$$

$$5) y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}, x = -2$$

$$6) f(x) = (x^4 + 1)^5, x = 1$$

$$7) y = \sqrt[4]{(2x^2-7)^5}, x = 4$$

$$8) f(x) = 5(1-x^2)^3 + 4x + 7$$

$$9) f(x) = (2x+1)^3 - \sqrt{3x^2-2x}$$

$$10) f(x) = (1+x^3)^4 + x^8 + 2$$

- تعني : إذا كان عدد السكان 4 آلاف نسمة فإن متوسط المستوى ليومي لغاز أول أكسيد الكربون يزداد بمقدار 0.24 جزء من المليون لكل ألف نسمة.

* يمثل الإقتران $P(t) = \sqrt{10t^2 + t + 299}$ إجمالي الأرباح السنوية لإحدى الشركات الصناعية (بالألف الدينار) حيث t عدد السنوات بعد عام 2015

(a) جد معدل تغير إجمالي الأرباح السنوي للشركة بالنسبة إلى الزمن t .

(b) جد معدل تغير إجمالي الأرباح السنوي للشركة عام 2020 وفسر معنى الناتج.

☆ احسب معدل التغير في مساحة المربع بالنسبة لطول ضلعه عندما يكون طول الضلع 10 cm :

✓ الحل :

$$A = x^2$$

$$\frac{dA}{dx} = 2x$$

$$= 2(10) = 20$$

☆ توصلت دراسة بيئية إلى نمذجة متوسط المستوى اليومي لغاز أول أكسيد الكربون في الهواء بإحدى القرى عن طريق الإقتران:

$$C(p) = 0.6 \sqrt{0.5 p^5 + 17}$$

حيث p عدد السكان بالآلاف نسمة علماً أن C يقاس بـ أجزاء من المليون (5 = C تعني 5 أجزاء من المليون)

(1) جد معدل التغير متوسط المستوى اليومي لغاز أول أكسيد الكربون في الهواء بالنسبة لعدد السكان.

✓ الحل : أجد $C'(p)$:

$$C(p) = 0.6 \sqrt{0.5 p^5 + 17}$$

$$C'(p) = \frac{0.6 p}{2 \times \sqrt{0.5 p^5 + 17}}$$

(2) اجد معدل تغير متوسط المستوى اليومي لغاز أول أكسيد الكربون في الهواء بالنسبة إلى عدد السكان عندما يكون عددهم 4 آلاف نسمة وفسر معنى الناتج.

✓ الحل : أجد $C'(4)$:

كن عالي الهم ولا ترضى بغير القمة

السلسلة والمتغير الوسيط

إذا كان $u = g(x)$, $y = f(u)$
فإن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

اسئلة :

(1) إذا كانت $y = 7u - 2$

$\frac{dy}{dx}$ فجد $u = x^3 + 4x$

الحل : ✓

$$\frac{dy}{dx} = 7 , \quad \frac{du}{dx} = 3x^2 + 4$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \\ &= 7 \times (3x^2 + 4) \end{aligned}$$

(2) إذا كانت $u = x^2 + 2x$, $y = u^2 - 5$

$\frac{dy}{dx}$ فجد عند $x = 2$:

الحل : ✓

(3) إذا كانت $y = (u^2 - 3)^4$

$u = \sqrt{x^2 + 3x}$
فجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 1$:

الحل : ✓

(4) إذا كان $u = 2\sqrt{x}$, $y = u^3 - 2u + 1$

$\frac{dy}{dx}$ فجد عند $x = 4$:

الحل : ✓

$$5) f(x) = 4(2 + 8x)^4$$

$$6) f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{4x-8}}$$

$$7) f(x) = \sqrt{5 + 3x^3}$$

$$8) f(x) = \sqrt{x} + (x - 3)^2$$

$$9) f(x) = \sqrt[3]{2x - x^5} + (4 - x)^2$$

$$5) \text{ إذا كان } u = 3 - 4x, y = u^5 + u^3$$

$$\text{فجد } \frac{dy}{dx} \text{ عند } x = 2$$

الـحل : ☒

☆ أجد مشتقة كل اقتران مما يلي :

$$1) f(x) = (1 + 2x)^4$$

$$2) f(x) = (3 - 2x^2)^{-5}$$

$$3) f(x) = (x^2 - 7x + 1)^{3/2}$$

$$4) f(x) = \sqrt{7 - x}$$

$$14) f(x) = \sqrt{25 - x^2}, x = 3$$

$$10) f(x) = (\sqrt{x} + 5)^4$$

$$11) f(x) = \sqrt{(2x - 5)^3}$$

* استعمال قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$:

$$15) y = 5u^2 + 3u, u = x^3 + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= (10u + 3)(3x^2)$$

$$= (10(x^3 + 1) + 3)(3x^2)$$

$$12) f(x) = (2x^3 - 3x^2 + 4x + 1)^5$$

$$16) y = \sqrt[3]{2u + 5}, u = x^2 - x$$

الحل: ☒

13) اجد مشتقة كل اقتران مما يأتي عند قيم x المعطاة.

$$f(x) = \frac{1}{(4x + 1)^2}, x = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = (4x + 1)^{-2}$$

$$f'(x) = -2(4x + 1)^{-3} (4)$$

$$= \frac{-8}{(4x + 1)^3}$$

$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = -1$$

$$17) y = 3u^3 - 5u + 2$$

$$u = x^2 - 1$$

عند $x = 2$

الحل: ☒

(21) يمثل الإقتران

$$N(t) = 400 \left(1 - \frac{3}{(t^2 + 2)^2} \right)$$

عدد الخلايا البكتيرية بعد t يوماً :

☆ أجد معدل تغير N بالنسبة إلى t عندما $t = 1$
الحل : ✓

(22) أجد معدل تغير N بالنسبة إلى t عندما $t = 4$
الحل : ✓

☆ إذا كان $h(3) = 2$, $h'(3) = -2$
 $g(2) = -3$, $g'(2) = 6$
فجد مشتقة ما يلي عند $x = 3$

$$\begin{aligned} 23) f(x) &= g(h(x)) \\ f'(x) &= g'(h(x)) \times h'(x) \\ f'(3) &= g'(h(3)) \times h'(3) \\ &= g'(2) \times -2 = -12 \end{aligned}$$

$$24) f(x) = (h(x))^3$$

$$18) y = (1 + u^2)^3 , \quad u = 2x - 1$$

عندما $x = 1$

الحل : ✓

☆ استعمل الإقتران $C(x) = 1000\sqrt{x^2 - 0.1x}$
تكلفة إنتاج x قطعة من منتج معين (بآلاف الدنانير)

(19) أجد معدل تغير تكلفة الإنتاج بالنسبة إلى عدد القطع المنتجة :

$$C(x) = 1000\sqrt{x^2 - 0.1x}$$

$$C'(x) = 1000 \times \frac{2x - 0.1}{2\sqrt{x^2 - 0.1x}}$$

(20) أجد معدل تغير تكلفة الإنتاج بالنسبة إلى عدد القطع المنتجة عندما يكون عدد القطع المنتجة 20 قطعة :

احلم... تمنى... نفذ

مهارات التفكير العليا

(25) إذا كان $h(x) = f(g(x))$ حيث $f(u) = u^2 - 1$ وكان $g'(2) = -1$, $g(2) = 3$ فجد $h'(2)$:

الحل : ☒

(26) أجد مشتقة الإقتران $y = (x^2 - 4)^5$ عندما $y = 0$:

الحل : ☒

(27) أي الأقرانات الآتية مختلف :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad h(x) = (x^2 + 1)^3$$

$$g(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \quad p(x) = x^2 + 1$$

الحل : ☒

(28) أجد مشتقة الإقتران

$$f(x) = \sqrt[3]{2x + (x^2 + x)^4}$$

اختبر نفسك :



أجد مشتقة كل اقتران :

1) $f(x) = \sqrt{4x - 1}$

2) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3 - x^2}}$

3) $f(x) = (3 + 4x)^{\frac{5}{2}}$

4) $f(x) = (8 - x)^{100}$

5) $f(x) = x^2 + (200 - x)^2$

6) $f(x) = (x + 5)^7 + (2x + 3)^6$

7) $f(x) = \sqrt[3]{x^5 + 6x}$

8) $f(x) = \frac{1}{(x^2 - 3)^3}$

9) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{16 - x^2}$

10) $f(x) = 4x^3 + (x - 2)^4$, $x = 2$

11) $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x}$, $x = 8$

☆ إذا كان $g(-2) = 8$, $g'(-2) = 4$
 $h(5) = -2$, $h'(5) = 5$

فجد مشتقة ما يأتي عندما $x = 5$

18) $f(x) = g(h(x))$

19) $f(x) = 4(h(x))^2$

* اجد قاعدة السلسلة في ايجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي

عند قيم x المعطاة

12) $y = u^3 - 7u^2$, $u = x^2 + 3$

13) $y = \sqrt{7 - 3u}$, $u = x^2 - 9$

14) $f(x) = u^3 - 5(u^3 - 7u)^2$
 $u = \sqrt{x}$, $x = 4$

15) $f(x) = 2u^3 + 3u^2$, $u = x + \sqrt{x}$, $x = 1$

☆ توصلت دراسة بيئية إلى نمذجة مقدار التلوث في
 إحدى البحيرات باستعمال الاقتران

الزمن بالساعات $P(t) = (t^{1/4} + 3)^3$

علماً أن P يقا بأجزاء من المليون

16) أجد معدل تغير مقدار التلوث في البحيرة بالنسبة
 إلى الزمن t

17) أجد معدل تغير مقدار التلوث في البحيرة بعد 16
 عاماً

النجاح...سلم لا تستطيع تسلقه
 و يداك في جيبك

الدرس الثاني - مشتقة الضرب والقسمة

مشتقة الضرب

3) $f(x) = 4x^2 \times \sqrt{x^3 + 8}$: جد $f'(x)$
الحل : ☒

4) $f(x) = (x^3 - 3x)(2x^2 - 5x + 4)$
جد $f'(2)$:
الحل : ☒

$$(f \cdot g)'x = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

بالكلمات :

الأول \times مشتقة الثاني + الثاني \times مشتقة الأول

اسئلة :

1) $f(x) = (x^2 + 3)(2x^2 - 5)$

جد $f'(x)$:

الحل : ☒

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 + 3)(4x) + (2x^2 - 5)(2x) \\ &= 4x^3 + 12x + 4x^3 - 10x \\ &= 8x^3 + 2x \end{aligned}$$

2) $f(x) = (2x^3 - 5x^2)(4x^2 - 7x + 9)$

الحل : ☒

اختبر نفسك :



5) $f(x) = (2x + 3)(x^2 - 5)$

6) $f(x) = (x^3 + 4)(7x^2 - 4x)$

7) $f(x) = (\sqrt{x} - 1)(x^2 + 4)$

8) $f(x) = (\sqrt{x} + 1)(3x - 2)$

$$3) f(x) = \frac{7x}{2x-3}$$

الحل : ✓

$$4) f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$$

الحل : ✓

مشتقة القسمة

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \times f'(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x)^2)}$$

بالكلمات :

$$\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

أسئلة :

☆ أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

$$1) f(x) = \frac{x}{2x+5}$$

الحل : ✓

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+5)(1) - (x)(2)}{(2x+5)^2} \\ &= \frac{2x+5-2x}{(2x+5)^2} = \frac{5}{(2x+5)^2} \end{aligned}$$

$$2) f(x) = \frac{2x^2-5}{3x^2+4}$$

الحل : ✓

اختبر نفسك :



$$a) f(x) = \frac{x^{-3}}{x^2+1}$$

: $f'(x)$

$$a) f(x) = \frac{x^3+2}{x^2+1}$$

جد : $f'(2)$

اختبر نفسك :



يمثل عدد سكان بلدة بالاقتران

$$p(t) = \frac{5}{2t^2 + 9}$$

حيث t الزمن بالسنوات منذ الآن و p عدد السكان بالآلاف

(a) اجد معدل تغير السكان في البلدة بالنسبة إلى الزمن t

(b) اجد معدل تغير عدد السكان في البلدة عندما $t = 2$

مشتقة المقلوب

إذا كانت $y = \frac{a}{f(x)}$ فإن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a \times f'(x)}{(f(x))^2}$$

بالكلمات :

$$\frac{\text{الثابت} \times \text{مشتقة الاقتران}}{2(\text{الاقتران})} = \left(\frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران}} \right)'$$

☆ يمثل الاقتران

$$C(t) = \frac{2t}{3t^2 + 16}$$

تركيز مسكن الألم في دم مريض بعد t ساعة من تناوله حيث C مقيسه بوحدة Mg/ml

(1) أجد معدل تغير تركيز المسكن في دم المريض بالنسبة إلى الزمن t

الحل : نجد $C'(t)$

قاعدة مشتقة القسمة

$$\begin{aligned} C'(t) &= \frac{(3t^2 + 16)(2) - (2t)(6t)}{(3t^2 + 16)^2} \\ &= \frac{6t^2 + 32 - 12t^2}{(3t^2 + 16)^2} \\ &= \frac{32 - 6t^2}{(3t^2 + 16)^2} \end{aligned}$$

(2) اجد معدل تغير تركيز المسكن في دم المريض عندما $t = 1$ مفسراً معنى الناتج

الحل : $C'(1)$

$$C'(1) = \frac{32 - 6(1)^2}{(3(1)^2 + 16)^2} = \frac{26}{361}$$

العلم نور والجهل ظلام

استخدم قاعدة السلسلة داخل
قاعدة الضرب والقسمة

اسئلة :

☆ جد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

1) $f(x) = (3x - 5)^4 (7 - x)^{10}$ ☒ الحل :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x - 5)^4 10 (7 - x)^9 \times (-1) \\ &\quad + (7 - x)^{10} 4(3x - 5)^3 (3) \\ &= -10 (3x - 5)^4 (7 - x)^9 \\ &\quad + 12 (7 - x)^{10} (3x - 5)^3 \end{aligned}$$

2) $f(x) = \frac{4x + 3}{(2x - 1)^3}$ ☒ الحل :

3) $f(x) = 20x(4x^3 - 1)^6$ ☒ الحل :

اسئلة :

☆ أجد مشتقة كل مما يأتي :

1) $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ ☒ الحل :

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1 + x)^2}$$

2) $f(x) = \frac{6}{3 + x^3}$ ☒ الحل :

3) $f(x) = \frac{2}{3 - 4x}$ ☒ الحل :

اختبر نفسك :

4) $f(x) = \frac{1}{7 - x^3}$

5) $f(x) = \frac{3}{2x + 3}$

أسئلة الدرس

☆ أجد مشتقة كل اقتران مما يلي :

$$1) f(x) = x (1 + 3x)^5$$

$$2) f(x) = \frac{x+3}{x+1}$$

$$3) f(x) = (2x+1)^5(3x+2)^4$$

$$4) f(x) = \frac{3x^2}{(2x-1)^2}$$

$$5) f(x) = \frac{6x}{\sqrt{5x+3}}$$

$$4) f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x+2)^4}$$

الحل : ☒

اختبر نفسك :



$$a) f(x) = (x^2 + 2)^5 (6 - 2x)^3$$

$$b) f(x) = \frac{5x}{(x^3 + 2)^4}$$

لا تدع الخوف من الخسارة يتغلب على
شغفك بالفوز

$$11) f(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$$

$$12) f(x) = \left(x + \frac{2}{x}\right) (x^2 - 3)$$

$$13) f(x) = (8x + \sqrt{x})(5x^2 + 3)$$

$$14) f(x) = 5x^{-3}(x^4 - 5x^3 + 10x - 2)$$

$$15) f(x) = x^2(3x - 1)^3, x = 1$$

$$6) f(x) = (4x - 1)(x^2 - 5)$$

$$7) f(x) = \frac{x^2 + 6}{2x - 7}$$

$$8) f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}$$

$$9) f(x) = (x + 1) \sqrt{x - 1}$$

$$10) f(x) = \frac{x}{5 + 2x} - 2x^4$$

(21) يمثل عدد سكان بلدة صغيرة بالاقتران :

$$P(t) = 12(2t^2 + 100)(t + 20)$$

حيث t الزمن بالسنوات منذ الآن ، و P عدد السكان بالآلاف :

* أجد معدل تغير عدد السكان في البلدة بالنسبة إلى الزمن t

$$16) f(x) = 3x\sqrt{5-x}, x = 4$$

$$17) f(x) = \frac{x-1}{2x+1}, x = 2$$

☆ يمكن نمذجة كتلة مركب في اثناء تفاعل كيميائي باستعمال الاقتران

$$M(t) = \frac{5.8t}{t+1.9}$$

حيث t الزمن بالثواني

بعد بدء التفاعل ، الكتلة بالغرام . أجد معدل تغير كتلة المركب بعد 5 ثوان من بدء التفاعل .

$$18) f(x) = (2x+3)(x-2)^2, x = 0$$

$$19) \text{ يمثل الاقتران } S(t) = \frac{2000t}{4+0.3t}$$

إجمالي المبيعات (بآلاف الدنانير) حيث t عدد السنوات بعد عام 2020 .

* أجد معدل تغير إجمالي المبيعات للشركة بالنسبة للزمن t

☆ أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

$$24) y = u(u^2 + 3)^3, u = (x + 3)^2, x = -2$$

(20) أجد معدل تغير إجمالي المبيعات للشركة عام 2030 ، مفسراً معنى الناتج

اختبر نفسك :



a) $(6g - 3f)'(2)$

b) $((f \cdot g)(2))'$

c) $\left(\left(\frac{g}{f}\right)(2)\right)'$

مهارات التفكير العليا

29) جد مشتقة

$$f(x) = x(4x - 3)^6(1 - 4x)^9$$

30) إذا كان : $f(x) = \frac{2x}{x+5} + \frac{6x}{x^2+7x+10}$

اثبت إن : $f(x) = \frac{2x}{x+2}$

31) جد $f'(3)$

32) إذا كان $f(x) = \frac{2x+8}{\sqrt{x}}$ فأجد قيمة x

عندما $f'(x) = 0$

25) $y = \frac{u^3}{u+1}, u = (x^2 + 1)^3, x = 1$

☆ إذا كان

$$f'(2) = -1, g(2) = 3, g'(2) = 2,$$

$$f(2) = 4$$

جد ما يلي:

26) $(fg)'(2) = f \cdot g' + g \cdot f'$

27) $\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$

28) $(3f + fg)'(2) =$

تمارين

☆ استعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند قيمة x المعطاة :

$$12) y = 5u^2 + 3u - 1, u = \frac{18}{x^2 + 5}, x = 2$$

$$13) f = \frac{1}{u+1}, u = x^3 - 2x + 5, x = 0$$

يمثل سكان : يمثل عدد سكان مدينة صغيرة بالاقتران حيث t الزمن

$$P(t) = 20 - \frac{6}{t+1} \text{ و } P \text{ عدد السكان بالآلاف}$$

(14) أجد معدل نمو السكان في المدينة بالنسبة إلى الزمن t

وجد فريق من الباحثين الزراعيين أنه يمكن التعبير عن ارتفاع نبتة مهجنة من نبات الشمس h (بالمتر) باستعمال الاقتران : $h(t) = \frac{3t^2}{4+t^2}$ ، حيث t الزمن بالأشهر بعد الزراعة

(16) أجد معدل تغير ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن .

☆ إذا كان

$$f'(0) = -3 \quad g(0) = -1 \quad g'(2) = 0, f(0) = 5$$

جد ما يلي :

$$17) (fg)'(0)$$

$$18) \left(\frac{f}{g}\right)'(0)$$

$$19) (7f + 2fg)'(0)$$

☆ أجد مشتقة كل اقترن مما يأتي :

$$1) f(x) = 2x(1 + 3x^2)^3$$

$$2) f(x) = \frac{x-2}{x+2}$$

$$3) f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} + 4x^3$$

$$4) f(x) = (1 - x^2)^4 (2x + 6)^3$$

$$5) f(x) = \frac{3x + 5}{(x + 1)^2}$$

$$6) f(x) = (5x^2 + 4x - 3)(2x^2 - 3x + 1)$$

$$7) f(x) = (3x^5 - x^2) \left(x - \frac{5}{x}\right)$$

$$8) f(x) = \frac{5x^2 - 1}{2x^3 + 3}$$

$$9) f(x) = \frac{1}{x-4}$$

$$10) f(x) = x^5 \sqrt{10x + 6}, x = 1$$

$$11) f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x+4}}, x = 12$$

الدرس الثالث - مشتقتا الاقتران الأسّي الطبيعي والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

$$6) f(x) = 4e^x + \sqrt{x^2 + 3}$$

$$7) f(x) = \sqrt[3]{x} + e^x$$

$$8) y = xe^x$$

قاعدة السلسلة داخل المشتقة

نظرية :

$$\text{إذا كان } f(x) = e^{g(x)} \text{ فإن}$$

$$f'(x) = e^{g(x)} \times g'(x)$$

اسئلة :

☆ جد مشتقة ما يأتي :

$$1) f(x) = e^{5x}$$

$$f'(x) = 5e^{5x}$$

نظرية :

$$\text{إذا كان } f(x) = e^x \text{ فإن } f'(x)$$

اسئلة :

☆ جد $f'(x)$:

$$1) f(x) = 3e^x$$

$$f'(x) = 3e^x$$

$$2) f(x) = x^3 + 2e^x$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2e^x$$

$$3) f(x) = 4x^2 - e^x$$

$$4) f(x) = \frac{e^x}{6x}$$

$$5) y = \frac{e^x}{x+1}$$

9) $f(x) = 5e^{\sqrt{x}}$

☆ تمثل المعادلة $T(t) = 18 + 12e^{0.002t}$ درجة حرارة الحساس في جهاز الكتروني بعد t ساعة من تشغيل الجهاز.

(a) جد معدل تغير درجة الحرارة للحساس بالنسبة الى الزمن t :

الحل : ✓

$$T'(t) = 0.002 \times 12e^{0.002t} \\ = 0.024e^{0.002t}$$

(b) جد معجل تغير درجة الحرارة الحساس بعد 5 ساعات من بدء تشغيل الجهاز :

الحل : ✓

$$T'(5) = 0.024 e^{0.002(5)}$$

☆ تستعمل مادة مشعة لتزويد قمر صناعي بالطاقة ويمكن نمذجة مقدار الطاقة المتبقية في المادة المشعة باستعمال الاقتران $P(t) = 50 e^{-0.004t}$ حيث t الزمن ، جد معدل تغير الطاقة بعد 500 يوم.

الحل : ✓

$$P'(t) = 50(-0.004). e^{-0.004t} \\ = -0.2 . e^{-0.004t} \\ P'(500) = -0.2 e^{-0.004(500)} \\ = -0.2 e^2$$

2) $f(x) = e^{x^2+4x}$

$$f'(x) = (2x + 4)e^{x^2+4x}$$

3) $f(x) = e^{(x^2+1)}$

4) $f(x) = x^2 . e^{3x}$

5) $f(x) = 3e^{\frac{1}{x}}$

6) $f(x) = x^3 - e^{7x}$

7) $f(x) = e^{7x+1}$

8) $f(x) = e^{x^3}$

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

نظرية :

إذا كان $f(x) = \ln x$ حيث $x > 0$ فإن

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

اسئلة :

☆ جد مشتقة ما يلي :

1) $f(x) = 7 \ln x$

$$f'(x) = 7 \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{7}{x}$$

2) $f(x) = -8 \ln x$

$$f'(x) = \frac{-8}{x}$$

3) $f(x) = x^3 + 2 \ln x$

4) $f(x) = x^5 \ln x$

نظرية :

إذا كان $f(x) = \ln g(x)$ فإن

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

5) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + \ln x$

6) $f(x) = 7e^{2x} + 6x \cdot \ln x$

7) $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$

8) $y = \frac{\ln x}{x}$

اختبر نفسك :

a) $f(x) = 8 \sqrt{x} - 6 \ln x$

b) $f(x) = 9x \cdot \ln x$

c) $y = \frac{5x}{\ln x}$

7) $f(x) = \ln(8x)$

8) $f(x) = 2 \ln(x^7)$

9) $f(x) = \ln(9x + 2)$

اختبر نفسك :



a) $f(x) = \ln 6x - \sqrt{x^2 + 3}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{\ln e^x}$

الأحلام تتحقق بالعمل
ليس بالتمني

اسئلة :



☆ جد $f'(x)$:

1) $f(x) = \ln(5x + 3)$

$f'(x) = \frac{5}{5x + 3}$

2) $f(x) = \ln(x^3 + 4x)$

3) $f(x) = \ln e^x$

4) $f(x) = \sqrt{x^3 + 6} + \ln 2x$

5) $f(x) = \ln(x^6)$

6) $f(x) = \ln(3x^2 - 2)$

أسئلة الدرس

☆ جد مشتقة ما يلي :

8) $f(x) = e^{-2x} (2x - 1)^5$

9) $f(x) = x^3 - 5e^{2x}$

10) $f(x) = 3 \ln x$

11) $f(x) = x^3 \cdot \ln x$

12) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

13) $f(x) = x^2 \cdot \ln (4x)$

14) $f(x) = \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)$

1) $f(x) = 2e^x + 1$

2) $f(x) = e^{3x} + 9$

3) $f(x) = (x^2 + 3x - 9) \cdot e^x$

4) $f(x) = \frac{e^x}{x^4}$

5) $f(x) = 6e^{\sqrt{x}}$

6) $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$

7) $f(x) = (e^x + 2) (e^x - 1)$

☆ جد مشتقة كل اقتران مما يأتي عند قيم x المعطاة

$$22) f(x) = e^{2x-1} \times \ln(2x-1), x = 1$$

$$23) f(x) = \frac{\ln x^2}{x}, x = 4$$

$$15) f(x) = \ln \sqrt{x^2 - 1}$$

$$16) f(x) = (\ln x)^4$$

$$17) f(x) = \ln(x^2 - 5)$$

$$18) f(x) = x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{2}e^x$$

$$19) f(x) = e^{2x} \cdot \ln x$$

$$20) f(x) = (\ln 3x)(\ln 7x)$$

$$21) f(x) = \ln(e^x - 2)$$

24) يمكن نمذجة انتشار الإنفلونزا في إحدى المدارس باستعمال اللإقتران :

$$P(t) = \frac{100}{1 + e^{3-t}}$$

حيث $P(t)$ العدد الكلي للطلبة المصابين بالمرض بعد t يوماً أجد سرعة انتشار الإنفلونزا بالمدرسة بعد 3 أيام .

25) يستعمل الاقتران $m(t) = t \ln t + 1$

$0 < t \leq 4$ لقياس قدرة الأطفال على التذكر حيث m مقياس من 1 إلى 7 و t عمر الطفل بالسنوات أجد معدل تغير قدرة الأطفال على التذكر بالنسبة لعمر الطفل.

تمارين

☆ أجد مشتقة كل اقتران :

1) $f(x) = x^{10} \cdot e^x$

2) $f(x) = 3e^{2x-1}$

3) $f(x) = 3e^x - 2e^{4x}$

4) $f(x) = (9x - 1)e^{3x}$

5) $f(x) = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x+1}}$

6) $f(x) = \frac{(e^x + 2)^3}{x}$

☆ استعمل قاعدة السلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لما يلي :

26) $y = e^{2u} + 3$, $u = x^2 + 1$

27) $y = \ln(u + 1)$, $u = e^x$

(28) اكتشف الخطأ يا كبير :



$y = \ln K x$

(29) إذا كان $y = \frac{7 \ln x - x^3}{e^{3x}}$

أثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{7}{e^3}$ عندما $x = 1$

$$14) f(x) = \ln \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$15) f(x) = x^5 \cdot \ln(3x)$$

$$16) f(x) = x^2 \cdot e^{-1}, x = -1$$

$$17) f(x) = \ln(x^2 + 1), x = 3$$

$$7) f(x) = e^{x^2+7}$$

$$8) f(x) = (2e^{3x} - 1)^2$$

$$9) f(x) = \sqrt{e^x + 1}$$

$$10) f(x) = \frac{\ln x}{x + 2}$$

$$11) f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

$$12) f(x) = e^x \cdot \ln x^2$$

$$13) f(x) = (3 + x) \cdot \ln x$$

☆ يمثل الاقتران $N(t) = 1000 \left(30 + e^{\frac{-t}{30}} \right)$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع :
جد العدد الأولي للخلايا البكتيرية في المجتمع.

(19) أجد معدل تغير عدد الخلايا البكتيرية بالنسبة للزمن

(20) أجد معدل نمو المجتمع بعد 20 ساعة

☆ يمكن نمذجة درجة استجابة المستهلكين لمنتج ما عن طريق الإعلانات باستعمال الاقتران

$$N(a) = 2000 + 500 \ln a, a \geq 1$$

الذي يمثل عدد الوحدات المباعة من المنتج حيث a المبلغ الذي انفق على الاعلانات بآلاف الدنانير.

(21) جد معدل تغير عدد الوحدات المباعة بالنسبة إلى المبلغ a الذي انفق على الإعلانات بآلاف الدنانير.

اللهم إنا نسألك أن تعلمنا ما ينفعنا
وتتفعنا بما علمتنا وبارك في علمنا وزدنا
علماً

(22) أجد معدل تغير عدد الوحدات المباعة عندما

$$a = 10$$

الدرس الرابع - مشتقتا اقتران الجيب واقتران جيب التمام

$$6) f(x) = \frac{3x}{\sin x}$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x) \cdot (3) - (3x)(\cos x)}{(\sin x)^2}$$

$$7) f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$f'(x) = \frac{(1 + \cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$8) f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot e^x - e^x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= e^x \cdot \cos x + e^x \sin x$$

$$9) f(x) = \frac{\sin x}{\ln x}$$

$$f'(x) = \frac{\ln x \cdot (\cos x) - \sin x \left(\frac{1}{x}\right)}{(\ln x)^2}$$

إذا كان $f(x) = \sin x$
فإن $f'(x) = \cos x$

إذا كان $f(x) = \cos x$
فإن $f'(x) = -\sin x$

اسئلة :

1) $f(x) = 5 \cdot \sin x$
 $f'(x) = 5 \cos x$

2) $f(x) = 7x - 2 \cos x$
 $f'(x) = 7 + 2 \sin x$

3) $f(x) = 6 \cos x$
 $f'(x) = -6 \sin x$

4) $f(x) = 5 \cos x + 3 \sin x$
 $f'(x) = -5 \sin x + 3 \cos x$

5) $f(x) = x^2 \cdot \cos x$
 $f'(x) = x^2 \cdot (-\sin x) + \cos x \cdot 2x$

قاعدة :

$$\frac{d}{dx} (\sin (g(x))) = \cos (g(x)) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} (\cos (g(x))) = -\sin (g(x)) \times g'(x)$$

اسئلة :

1) $f(x) = \cos 7x$

$$f'(x) = -\sin 7x \times 7 = -7 \sin 7x$$

2) $f(x) = 3 \sin 4x$

3) $f(x) = \cos (x^2 + 3x)$

4) $f(x) = \sin e^{2x}$

5) $f(x) = \ln \sin 3x$

10) $f(x) = e^x \sin x + \ln (x^2 + 2)$

$$f'(x) = e^x (\cos x) + \sin x (e^x) + \frac{2x}{x^2 + 2}$$

اختبر نفسك :



1) $f(x) = \frac{\sin x}{6} + 4 \cos x$

2) $3x - 2 \cos x$

3) $f(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$

4) $f(x) = e^x \cdot \cos x$

5) $f(x) = \frac{x + \cos x}{\sin x}$

☆ يمثل الاقتران : $h(t) = 10 + 4 \sin \frac{\pi}{6} t$

ارتفاع الماء عند رصيف أحد الموانئ بعد t
ساعة تلي الساعة 6 . am جد معدل تغير
ارتفاع الماء عند الرصيف بالنسبة للزمن

الحل : ☒

اسئلة :

جد مشتقة كل اقتران :

1) $f(x) = 2 \cos x + \sin x$

2) $f(x) = 5 + \cos x$

3) $f(x) = \sin x - \cos$

4) $f(x) = x \cdot \sin x$

5) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

6) $f(x) = e^{\cos 5x}$

7) $f(x) = \sin^2 x$

8) $f(x) = \cos^5 3x^2$

اختبر نفسك :

1) $f(x) = \sqrt{\sin x}$

2) $f(x) = \ln (\cos 3x)$

☆ يمثل الاقتران

$h(t) = 85 \sin \left(\frac{\pi}{20} \right) (t - 10) + 90$

الارتفاع بالأقدام لشخص مركب في عجلة دوارة
حيث t الزمن جد معدل تغير ارتفاع الشخص
بالنسبة للزمن t .

الحل : ☒

$$h'(t) = 85 \cos \left(\frac{\pi}{20} \right) (t - 10) \frac{\pi}{20}$$
$$= \frac{85}{20} \pi \cos \frac{\pi}{20} (t - 10)$$

$$13) f(x) = e^{2x} \cdot \sin 10x$$

$$6) f(x) = e^x \cdot \sin x$$

$$14) f(x) = (\cos x^2) (\ln x)$$

$$7) f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$$

$$15) f(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sin \frac{\pi x}{2}$$

$$8) f(x) = \sin (x^2 + 1)$$

$$16) f(x) = 4 \cdot \sin^2 x$$

$$9) f(x) = \ln (\sin x)$$

$$17) f(x) = \cos^3 2x \cdot \cos x$$

$$10) f(x) = \cos (5x - 2)$$

$$18) f(x) = 5 \cdot \sin \sqrt{x}$$

$$11) f(x) = \sin 3x + \cos 6x$$

$$19) f(x) = (\cos 2x - \sin x)^2$$

$$12) f(x) = \cos (x^2 - 3x - 4)$$

☆ إذا كان

$$y = \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sin^2 x \text{ أثبت أن}$$

الحل : ✓

$$20) f(x) = \sin \sqrt{x} + \sqrt{\sin 2x}$$

$$21) f(x) = \frac{(\ln x)^2}{\sin x}$$

☆ يمثل الاقتران

عدد $D(t) = 1500 + 400 \sin 0.4t$ الغزلان في إحدى الغابات بعد t سنة من بدء دراسة لأحد الباحثين عليها. أجد معدل التغير لعدد الغزلان في الغابة بالنسبة إلى الزمن t .

الحل : ✓

☆ أجد مشتقة

$$f(x) = e^x \sin^2 x \cos x$$

الحل : ✓

☆ يمكن إيجاد عدد ساعات النهار H في أي يوم t من العام في إحدى المدن باستعمال الاقتران

$$H(t) = 12 + 2.4 \sin \left(\frac{2\pi}{365} (t - 80) \right)$$

أجد معدل تغير عدد ساعات النهار بالنسبة إلى الزمن t في هذه المدينة.

الحل : ✓

العلم يوسع الآفاق، ويعمل على إيجاد الكثير من الحلول.

تمارين

7) $f(x) = \cos(\ln x)$

8) $f(x) = e^x(\cos x + \sin x)$

9) $f(x) = \cos(1 - 2x)^2$

10) $f(x) = 4\sqrt{\cos x + \sin x}$

11) $f(x) = (1 + \cos 2x)^3$

12) $f(x) = \sin^3 x \cos 4x$

13) $f(x) = \sin\left(\frac{e^x}{1 + e^x}\right)$

1) $f(x) = \sin^3(5x - 1)$

2) $f(x) = \sin(x^3 - 2x + 4)$

3) $f(x) = 2 \cos(-4x)$

4) $f(x) = 3 \sin(3x + 7)$

5) $f(x) = 2x^3 \sin x - 3x \cos x$

6) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

☆ يمثل الاقتران

$$D(t) = 500 + 200 \sin(0.4(t - 2))$$

عدد الحيوانات المفترسة في إحدى الغابات بعد t سنة من بدء دراسة لأحد الباحثين عليها . أجد معدل تغير عدد الحيوانات المفترسة في الغابة بالنسبة إلى الزمن t .

✓ الحل :

☆ يمثل الاقتران :

$$C(t) = 30 + 21.6 \sin\left(\frac{2\pi t}{365} + 10.9\right)$$

الاستهلاك اليومي من الوقود لإحدى السيارات ، حيث t الزمن بالأيام ، أجد معدل تغير استهلاك السيارة للوقود بالنسبة إلى الزمن t .

✓ الحل :

$$14) f(x) = \frac{\cos x^2}{e^x}$$

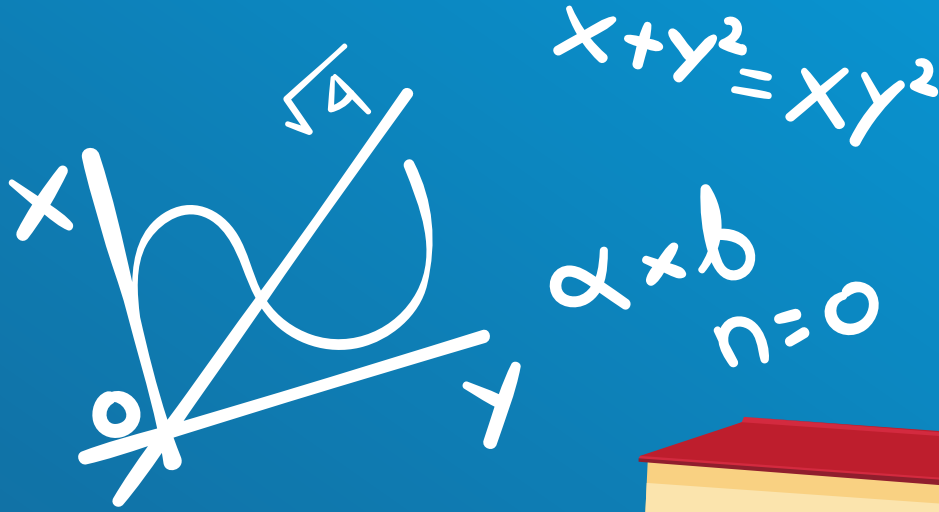
$$15) f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

$$16) f(x) = \frac{x \sin x}{1 + x}$$

$$17) f(x) = \frac{x}{2 - \cos x}$$

$$18) f(x) = \ln(\cos x - \sin x)$$

تذكر دوماً لحظات التخرج والتكريم
وقت الضيق والتعب، سيهون عليك ذلك.



أ. فهد السلامة

