أساس توجيهي

الأساس في الرياضيات

أدبي

الوحدة الثانية:

التّفاضل

الأستاذ

بلال أبو دريّع

مدارس التربية الريادية
PIONEER EDUCATIONAL SCHOOLS

00962 785 351 625

@بلال أبو دريع

توجيهي

مراجعة: قواعد الاشتقاق

قبل ما نبدأ بالوحدة تعال نتذكر قواعد الاشتقاق التي مرّت معنا بالأول الثانوي

1

مشتقة الثابت = 0

إذا كان $f(x) = c$، c عدد ثابت

فإن $\leftarrow f'(x) = 0$

أمثلة

1) $f(x) = 2 \rightarrow f'(x) = 0$

2) $f(x) = \frac{7}{5} \rightarrow f'(x) = 0$

2

مشتقة اقتران القوة:

$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n\,x^{n-1}$

أمثلة

1) $f(x) = x^7 \quad \rightarrow f'(x) = 7x^6$

2) $f(x) = 5x^2 \quad \rightarrow f'(x) = 10x$

3) $f(x) = 6x^{-3} \quad \rightarrow f'(x) = -18x^{-4}$

تذكر: $\frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b}$

4) $f(x) = x^{\frac{7}{2}} \quad \rightarrow f'(x) = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}}$

5) $f(x) = \frac{2}{x^{-6}}$

$\frac{a}{b^{-x}} = ab^x$

نجهز : $f(x) = 2x^6$

نشتق : $f'(x) = 12x^5$

6) $f(x) = \sqrt{x}$

$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

نجهز : $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

نشتق : $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

7) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$

نجهز : $f(x) = x^{\frac{2}{5}}$

نشتق : $f'(x) = \frac{2}{5}\,x^{-\frac{3}{5}}$

تذكر أن المشتقة توزع على المجموع والطرح

8) $f(x) = x^2 + 2x^5 + 8$

$\rightarrow f'(x) = 2x + 10x^4$

9) $f(x) = 2x^{\frac{5}{3}} + \frac{7}{\sqrt{x}} - 2x^{-2}$

نجهز : $f(x) = 2x^{\frac{5}{3}} + 7x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-2}$

نشتق : $f'(x) = \frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}} + -7x^{-\frac{3}{2}} + 4x^{-3}$

10) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x^{\frac{5}{2}}}$

نجهز : $f(x) = 2\,x^{\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{5}{2}}$

نشتق : $f'(x) = x^{-\frac{2}{3}} + -5\,x^{-\frac{7}{2}}$

ولم أجد الإنسان إلا ابن سعيه

فمن كان أسعى كان بالمجد أجدر

0785351625

تمهيد

1) إذا كان ← $y = x^2$

فإن ← $\frac{dy}{dx} = 2x$

اشتقينا y بالنسبة لـ x

2) إذا كان ← $u = m^3$

فإن ← $\frac{du}{dm} = 3m^2$

اشتقينا u بالنسبة لـ m

3) إذا كان ← $y = 4u^2$

فإن ← $\frac{dy}{du} = 8u$

اشتقينا y بالنسبة لـ u

قاعدة السلسلة: -المتغير الوسيط-

إذا كان : $y = g(u)\ ,\ u = f(x)$

فإن: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

حيث u هو المتغير الوسيط

لاحظ إذا طلب منك اشتقاق y بالنسبة لـ x لكن ما فيه علاقة بينهم، لذلك نستعين ونربط بينهم بمتغير آخر اسمه الوسط

أمثلة

1) إذا كان: $y = u^2 - 2u$, $u = 4x^2$

جد $\frac{dy}{dx}$:

الحل

نجد: $\frac{du}{dx} = 8x$

$$\frac{dy}{du} = 2u - u$$

الأن نكتب قاعدة السلسلة:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

نعوض $\frac{dy}{dx} = (2u - 2)(8x)$

نعوض قيمة u من السؤال: $u = 4x^2$

$$\frac{dy}{dx} = (2(4x^2) - 2)8x$$

$$= (8x^2 - 2)8x$$

$$\frac{dy}{dx} = 64x^3 - 16x$$

2) إذا علمت $y = u^3$, $u = x^2 - 1$

جد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة السلسلة.

الحل

نجد: $\frac{du}{dx} = 2x, \frac{dy}{du} = 3u^2$

نكتب قاعدة السلسلة:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

الأن نعوض

$$\frac{dy}{dx} = (3u^2)(2x)$$

نعوض قيمة $u = x^2 - 1$

$$\frac{dy}{dx} = (3(x^2 - 1)^2)(2x)$$

3)

إذا كان $y = u^2 + u$

حيث $u = 3 - 4x$

جد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 2$

الحل

$$\frac{dy}{du} = 2u + 1$$

$$\frac{du}{dx} = -4$$

القانون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= (2u + 1)(-4)$$

$$= (2(3 - 4x) + 1)(-4)$$

نعوض $x = 2$;

$$= (2(-5) + 1)(-4)$$

$$= (-9)(-4) = 36$$

تمرين

إذا علمت أن $y = 4u^2 - 1$

حيث $u = x^2 - 2$

جد $\frac{dy}{dx}|_{x=2}$

معناها عندما $x = 2$

النجاح هو أن تنتقل من فشل إلى فشل
دون أن تفقد الأمل

07853351625

مشتقة الاقتران المركب باستعمال قاعدة السلسلة: (قوس)^قوة.

إذا كان $f(x) = (g \circ h)(x) = g\big(h(x)\big)$

فإننا نسمي h(x) اقتراناً داخلياً ونسمي g(x) اقتران خارجي.

ومن الأمثلة على الإقترانات المركبة اقتران (قوس)^قوة ونشتقه على قاعدة السلسلة.

داخلي
خارجي

أمثلة

جد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

$1)\ y = (x^2+1)^3$

الحل

نفرض أن الاقتران الداخلي $u = x^2+1$

فيكون الاقتران الخارجي $y = u^3$

الآن نجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة السلسلة.

$$\frac{du}{dx} = 2x \quad , \frac{dy}{du} = 3u^2$$

القانون $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

نعوض $= (3u^2)(2x)$

$$= (3(x^2+1)^2)(2x)$$

$$= 6x \times (x^2+1)^2$$

نحل بهذه الطريقة إذا طلب الاشتقاق باستعمال قاعدة السلسلة.

$2)\ y = \sqrt{4-3x}$

جد المشتقة باستخدام قاعدة السلسلة.

الحل

نميز الاقتران $y = (4-3x)^{\frac{1}{2}}$

الاقتران الداخلي $u = 4-3x$

الاقتران الخارجي $y = (u)^{\frac{1}{2}}$

الأن نجد $\frac{dy}{dx}$ بقاعدة السلسلة

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad \frac{du}{dx} = -3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= (\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}})(-3)$$

$$= \left(\frac{1}{2}(u-3x)^{-\frac{1}{2}}\right)(-3)$$

$$= \frac{-3}{2(4-3x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{-3}{2\sqrt{4-3x}}$$

طبعاً ما تخاف رح نتعلم قواعد سريعة لاشتقاق (قوس)^قوة
لكن هاي الطريقة إذا طلب السؤال إنك تستق بقاعدة السلسلة فقط.

تمرين

جد مشتقة كل من اقتران مما يأتي:

$b)\ y = \sqrt{x^3+4x}$ ج: $\frac{3x^2+4}{2\sqrt{x^3+4x}}$	$a)\ y = (x^2-2)^4$ ج: $8x(x^2-2)^3$

إعلم ... أنك إذا رفضت كل ماهو دون مستوى القمة، فإنك لا شك ستصل إليها

0785351625

قاعدة سلسلة القوة:

قاعدة سريعة لاشتقاق (قوس)^قوة

← إذا كان $f(x) = \left(g(x)\right)^n$

فإن $f'(x) = n\left(g(x)\right)^{n-1} \times g'(x)$

بالكلمات:

مشتقة (قوس)^قوة =

القوة × (القوس كما هو)^القوة-1 × مشتقة ما داخل القوس

أمثلة

1) $f(x) = (2x^4 - x)^3 \quad , x = 1$

الحل

$f'(x) = 3(2x^4 - x) \times (8x^3 - 1)$

الآن نعوض $x = 1$

$f'(1) = 3(1)(7) = 21$

---

2) $f(x) = (3x^2 - 1)^4 \quad , x = 1$

الحل

$f'(x) = 4(3x^2 - 1)^3 \times (6x)$

نعوض $x = 1$

$f'(1) = 4(8)(6) = 192$

---

3) $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - 1} \quad , x = 0$

الحل

نجهز : $f(x) = (2x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$

نشتق : $f'(x) = \frac{1}{3}(2x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} \times (4x)$

نعوض $x = 0$

$f'(0) = \frac{1}{3}(-1)^{-\frac{2}{3}}(0) = 0$

تمرين

جد مشتقة كل اقتران مما يلي:

1) $f(x) = (x^4 + 1)^5 \quad , \quad x = 1$

ج: 320

---

2) $f(x) = (2x^3 - 3x^2 + 1)^3$

ج: $3(6x^2 - 6x)(2x^3 - 3x^2 + 1)^2$

---

3) $f(x) = (2x + 1)^{\frac{3}{2}} \quad , x = 4$

ج: 9

النجاح لايحتاج إلى أقدام

بل إلى إقدام

0785351625

اشتقاق الجذور:

مخطط مشتقات الجذور

مشتقة الجذر التربيعي $\sqrt{\quad}$

$$\frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{2\times\sqrt{\text{الجذر نفسه}}}$$

قاعدة سريعة لاشتقاق الجذر التربيعي

مشتقة الجذور الآخرى

$$\sqrt[n]{(\;)^m}$$

نجهز ثم نشتق

$(\quad)^{\frac{m}{n}} \leftarrow$ نشتق

أمثلة

جد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}$

الحل: جذر تربيعي $\leftarrow \dfrac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{\text{2×الجذر نفسه}}$

$$f'(x)=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2+2x+1}}$$

2) $f(x)=\sqrt{1+x^3}\qquad ,x=2$

الحل:

$$f'(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$$

نعوض $x=2$

$$f'(2)=\frac{3}{\sqrt{9}}=\frac{3}{3}\;=1$$

3) $f(x)=\sqrt{x}$

الحل: تربيعي

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4) $y=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}\qquad ,x=-2$

الحل: نجهز الاقتران أولاً لأنه جذر غير تربيعي

$$y=(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$$

الأن نشتق

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}\times(2x)$$

نعوض $x=-2$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=-2}=\frac{2}{3}(3)^{-\frac{1}{3}}(-4)=-\frac{8}{3\sqrt[3]{3}}$$

تمرين

جد مشتقة كل من الاقترانات الآتية:

1) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}\qquad ,x=2$

ج: 1

2) $f(x)=\sqrt[3]{4x+7}\qquad ,x=5$

ج: $\frac{4}{27}$

3) $f(x)=\sqrt[4]{(2x^2-7)^5}\qquad ,x=4$

ج: $20\sqrt{5}=20\sqrt[4]{25}$

4) $f(x)=\sqrt{2x^3-2x+4}$

ج: $\frac{11}{4}$

العديد من حالات الفشل في الحياة هم الناس الذين لم يدركو مدى قربهم من النجاح عندما تخلّو

قواعد الاشتقاق الاساسية وقاعدة السلسلة

إذا كان الاقتران f والاقتران g قابلين للاشتقاق وكان a عدداً حقيقياً فإن:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

(مشتقة المجموع أو مشتقة الفرق)

$$(af)'(x) = a\, f'(x)$$

(مشتقة (عدد×اقتران) ← العدد×مشتقة الاقتران

أمثلة

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = 5(1 - x^2)^3 + 4x + 7$

الحل

$$f'(x) = 15(1 - x^2)^2 \times (-2x) + 4$$

$$f'(x) = -30 \times (1 - x^2)^2 + 4$$

---

2) $f(x) = (2x + 1)^3 - \sqrt{x^3}$

$$f'(x) = 3(2x + 1)^2 \times 2 - \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}}$$

$$= 6(2x + 1)^2 - \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}}$$

---

3) $f(x) = 4(2x^2 + 1)^3 + \sqrt{x^2 + 2x}$

الحل

$$f'(x) = 12(2x^2 + 1)^2 \times (4x) + \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x}}$$

$$f'(x) = 48 \times (2x^2 + 1)^2 + \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$$

4) $f(x) = \sqrt[3]{2x + 1} - (x - x^2)^2$

الحل

نجهز: $f(x) = (2x + 1)^{\frac{1}{3}} - (x - x^2)^2$

نشتق:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(2x + 1)^{-\frac{2}{3}}(2) - 2(x - x^2)^1 \times (1 - 2x)$$

تمرين

تحقق من فهمك

1) $f(x) = (1 + x^3)^4 + x^8 + 2$

---

2) $f(x) = (x^2 + 2)^4 + \sqrt{x}$

---

3) $f(x) = \sqrt[3]{2x - 1} - (x - 3)^3$

على الأقل ..إذا درست وفشلت سيكون ندمك أقل الما

إذا فشلت وأنت لم تدرس

0785351625

معدل التغير:

تعتبر المشتقة معدل تغير كمية ما بالنسبة إلى كمية أخرى عند لحظة (نقطة)معينة.

←فإذا كانت كان المطلوب هو إيجاد $\frac{dy}{dx}$ فهذا يعني إيجاد معدل تغير y بالنسبة إلى x

أمثلة

من الحياة

1) تلوث: توصلت دراسة بيئية إلى نمذجة متوسط المستوى اليومي لغاز أول اكسيد الكربون في الهواء بإحدى القرى عن طريق الاقتران:

$$c(p) = 0.6\sqrt{0.5p^2 + 17}$$

حيث p عدد السكان بالألف نسمة علماً بأن c يقاس بأجزاء من المليون ($c = 5$ تعني 5 أجزاء من المليون)

a) جد معدل تغير متوسط المستوى اليومي لغاز أول أكسيد الكربون في الهواء بالنسبة لعدد السكان.

الحل:

المطلوب :هو $c'(p)$

$$\rightarrow c'(p) = \frac{0.6\,p}{2\sqrt{0.5p^2 + 17}}$$

b) جد معدل تغير متوسط المستوى اليومي لغاز أو لأكسيد الكربون في الهواء عندما يكون عدد السكان 4 آلاف نسمة.

الحل:

المطلوب: $c'(4)$

$$c'(p) = \frac{0.6\,p}{2\sqrt{0.5p^2 + 17}}$$

$$c'(4) = \frac{0.6\,(4)}{2\sqrt{0.5(4)^2 + 17}}$$

$$= 0.24$$

هذا يعني انه إذا كان عدد السكان (4) آلاف نسمة فإن متوسط المستوى اليومي لغاز أول أكسيد الكربون يزداد بمقدار 0.24 جزء من مليون لكل ألف نسمة.

2) تلوث: توصلت دراسة بيئية إلى نمذجة مقدار التلوث في إحدى البحيرات باستعمال الاقتران:

$$p(t) = \left(t^{\frac{1}{4}} + 3\right)^3$$

حيث t الزمن بالسنوات علماً أن:

p يقاس بأجزاء من المليون.

a) جد تغير مقدار التلوث في البحيرة بالنسبة للزمنt.

b) جد معدل تغير مقدار التلوث في البحيرة بعد 16 عاماً.

الحل:

a) المطلوب $p'(t)$

$$p'(t) = 3\left(t^{\frac{1}{4}} + 3\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}\right)$$

$$p'(t) = \frac{3\left(t^{\frac{1}{4}} + 3\right)^2}{4\left(\sqrt[4]{t}\right)^3}$$

b) المطلوب $p'(16)$

$$p'(t) = \frac{3\left(t^{\frac{1}{4}} + 3\right)^2}{4\left(\sqrt[4]{t}\right)^3}$$

$$p'(16) = \frac{3\left(\sqrt[4]{16} + 3\right)^2}{4\left(\sqrt[4]{16}\right)^3}$$

$$= \frac{3(2+3)^2}{4(2)^3}$$

$$= \frac{3(25)}{4(8)} = \frac{75}{32}$$

$$= \frac{3(25)}{4(8)} = \frac{75}{32}$$

تمرين
تحقق من فهمك

صناعة: تمثيل الاقتران:

$$p(t) = \sqrt{10t^2 + t + 22q}$$

إجمالي الأرباح السنوية لإحدى الشركات الصناعية (بآلاف الدنانير) ، حيث t عدد السنوات بعد عام 2015 م.

a) جد معدل تغير إجمالي الأرباح السنوية بالنسبة إلى الزمن t.

b) جد معدل تغير إجمال الأرباح السنوية للشركة عام 2020م.

مشتقة تركيب اقترانين:

يمكن إيجاد مشتقة الاقتران الناتج من تركيب أي اقترانين قابلين للاشتقاق كما يأتي:

←إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق فإنه يمكن إيجاد مشتقة الاقتران المركب

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

تقرأ بعد — خارجي — داخلي

باستعمال القاعدة الآتية:

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big).g'(x)$$

بالكلمات: مشتقة تركيب اقترانين= مشتق الخارجي (الداخلي كما هو) × (مشتقة الداخلي)

أمثلة

1) إذا كان: $g(2) = -2 \quad , \quad g'(3) = 1$

$h(2) = 3 \quad , \qquad h'(2) = 2$

جد مشتقة الاقتران:

عندما $f(x) = g\big(h(x)\big), \ (x = 2)$

الحل

$$f'(x) = g'\big(h(x)\big).h'(x)$$

نعوض الأن $x = 2$

$$f'(x) = g'\big(h(2)\big).\big(h'(2)\big)$$
$$= g'(3).(2)$$
$$= 1 . 2 = 2$$

من أعانك على الشر ظلمك

2) إذا علمت أن: $g(1) = 4\ , g'(1) = 2$

$h(1) = 1\ , h'(4) = 7\ , h'(1) = 5$

جد: a) $(h\ o\ g)'(1)$.

b) $(g\ o\ h)'(1)$.

الحل

$$a)\ (h\ o\ g)'(1) = h'\big(g(1)\big).g'(1)$$
$$= h'(4)\,.2$$
$$= 7\ .\ 2 = 14$$
$$b)\ (g\ o\ h)'(1) = g'\big(h(1)\big).h'(1)$$
$$= g'(1).5$$
$$= 2\,.5 = 10$$

---

3) إذا كان:

$h(3) = 2\ ,\qquad h'(3) = 1$

جد مشتقة الاقتران: $f(x)\ \big(h(x)\big)^3$

عندما $x = 3$

الحل

$$f'(x) = 3\big(h(x)\big)^2 \times h'(x)$$
$$= 3\big(h(3)\big)^2 \times h'(3)$$
$$= 3(2)^2 \times (1)^2 = 12$$

---

4) فتّاك:

إذا كان $h(x) = f\big(g(x)\big)$

حيث $f(u) = 2u^2 - 1$

وكان $g(2) = 3\ ,\ g'(2) = -1$

جد $h'(2)$

الحل

$$h'(x) = f'\big(g(x)\big)\,.g'(x)$$

نعوض $x = 2$

$$h'(2) = f'\big(g(2)\big)\,.g'(2)$$

نعوض $= f'(3).-1$

الآن نشتق $f(u)$ لإيجاد $f'(3)$

$$f(u) = 2u^2 - 1 \rightarrow f'(u) = 4u$$
$$f'(3) = 4.3 = 12$$

نعوض في $h'(2) = f'(3).-1$

$$h'(2) = 12\ .-1 = -12$$

---

5) إذا علمت أن $h(x) = f\big(g(x)\big)$

حيث $g(x) = x^2\ ,\ f(x) = x^3$

جد $h'(1)$.

الحل

نشتق $f(x)$ و $g(x)$

$$g'(x) = 2x \rightarrow g'(1) = 2$$
$$f'(x) = 3x^2 \rightarrow f'(1) = 3$$

الآن نشتق $h'(x)$: $h'(x) = f'\big(g(x)\big).g'(x)$

نعوض (1) $h'(1) = f'\big(g(1)\big)\,.g'(1)$

$$= f'(1)\ .2$$
$$= 3\ .\ 2 = 6$$

السؤال هو نصف المعرفة....

<<اسأل>>

تمارين

1) إذا علمت أن: $g(2) = 7\ ,\ g'(3) = 9$

$h(2) = 3\ ,\ h'(2) = 4$

جد مشتقة الاقتران

عند $x = 2$ $\qquad f(x) = g(h(x))$

ج: 36

2) إذا كان: $h(5) = -2 \quad , \quad h'(5) = 6$

$g'(-2) = 4 \quad , \quad g(-2) = 8$

جد مشتقة كل اقتران مما يلي عند $x = 5$

$a)\ f(x) = g(h(x))$

$b)\ f(x) = 4(h(x))^2$

ج: $a)\ 24 \quad , \quad b) - 96$

3) إذا علمت أن $h(x) = f(g(x))$

حيث $f(p) = 3p^2 + 1$

وكان: $g(1) = 2\ ,\ g'(1) = -1$

جد: $h'(1)$

ج: -36

دمج الأسئلة قاعدة السلسلة والمتغير الوسيط مع بقية الأفكار:

مثال 1

استعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

$a)\ y = \sqrt[3]{4u + 3}$

$u = 2x^2 + 5$

الحل

نجهز $\rightarrow y = (4u + 3)^{\frac{1}{3}}$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{3}(4u + 3)^{-\frac{2}{3}} \times 4$$

$$= \frac{4}{3}\,(4u + 3)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\rightarrow u = 2x^2 + 5$$

$$\frac{du}{dx} = 4x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{4}{3}\,(4u + 3)^{-\frac{2}{3}} \times (4x)$$

نعوض قيمة u

$$= \frac{4}{3}(4(2x^2 + 5) + 3)^{-\frac{2}{3}}\,(4x)$$

$b)\ f(x) = \sqrt{u^2 + 1}$

$u = x^2$

الحل

$$y = \sqrt{u^2 + 1} \rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{2u}{2\sqrt{u^2 + 1}}$$

$$\rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}}$$

$$u = x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}}\right)(2x)$$

$$= \frac{x^2}{\sqrt{(x^2)^2 + 1}}\,(2x)$$

شجع نفسك ...لأنه لا أحد سيقوم بذلك بدلاً منك

0785351625

مثال 2

إذا علمت أن $y = (1 + u^2)^3$

$u = 2x$

جد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = \frac{1}{2}$

الحل

$$\frac{dy}{du} = 3(1 + u^2)^2(2u)$$

$$\frac{du}{dx} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= 3(1 + u^2)^2(2u)\,(2)$$

$$= 3(1 + (2x)^2)^2\,\big(2(2x)\big)(2)$$

$$\frac{dy}{dx}\,\Big|_{x=\frac{1}{2}} = 12 \times 4 = 48$$

أسئلة شاملة كاملة على جميع أفكار الدرس:

1) إذا كان $y = u^3 - 2u + 1$

حيث $u = 2\sqrt{x}$

أجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 4$

ج: 23

---

2) إذا كان $y = 2u^2$

حيث $u = x^3 + 1$

جد $\frac{dy}{dx}$ عندما $u = 2$

ج: 24

---

3) إذا كان:

$f(x) = u^3 - 5(u^3 - 7u)^2$

$, u = \sqrt{x}$

استعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}\,|_{x=4}$

ج: $-\frac{288}{4}$

0785351625

4) جد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

$a)\ y = \sqrt{4x-1}$

$b)\ \sqrt{2x-x^5} + (4-x)^2$

$c)\ f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{(2x-5)^2}}$

5) جد مشتقة الاقتران $y = (x^3-8)^2$

عندما $y = 0$

6) جد مشتقة كل اقتران مما يلي عند قيمة x المعطاة:

$a)\ f(x) = 4x^3 + (x-2)^4 \quad , \quad x = 2$

ج: 48

$b)\ f(x) = \sqrt{x^2+8x} \quad , \quad x = 8$

ج: $\frac{12}{\sqrt{128}}$

7) إذا كان $g(-2) = 3 \ ,\ g'(-2) = 2$

$h(5) = -2 \ ,\ h'(5) = 5$

جد مشتقة كل اقتران مما يأتي عندما $x = 2$

$a)\ f(x) = g(h(x))$

ج: 10

$b)\ f(x) = 4\big(h(x)\big)^2$

ج: 60-

8) يمثل الاقتران $N(t) = 20 - \frac{30}{\sqrt{9-t^2}}$

عدد السلع التي يمكن لمحاسب أن يمررها في أحد المحال التجارية فوق الماسح الضوئي في الدقيقة الواحدة بعد t ساعة من بدء عمله جد سرعة المحاسب في المهمة بعد t ساعة.

تدرب وأحل المسائل (أسئلة الكتاب ص62)

أجد مشتقة كل إقتران مما يأتي:

1) $f(x) = (1 + 2x)^2$

2) $f(x) = (3 - 2x^2)^{-5}$

3) $f(x) = (x^2 - 7x + 1)^{\frac{3}{2}}$

4) $f(x) = \sqrt{7 - x}$

5) $f(x) = 4(2 + 8x)^4$

6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{4x-8}}$

7) $f(x) = \sqrt{5 + 3x^2}$

8) $f(x) = \sqrt{x} + (x - 3)^2$

9) $f(x) = \sqrt[3]{2x - x^5} + (4 - x)^2$

10) $f(x) = \left(\sqrt{x} + 5\right)^4$

11) $f(x) = \sqrt{(2x - 5)^3}$

12) $f(x) = (2x^3 - 3x^2 + 4x + 1)^5$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

13) $f(x) = \frac{1}{(4x+1)^2}, x = \frac{1}{4}$

14) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, x = 3$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي.

15) $y = 5u^2 + 3u, u = x^3 + 1$

16) $y = \sqrt[3]{2u + 5}, u = x^2 - x$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

17) $y = 3u^2 - 5u + 2, u = x^2 - 1, x = 2$

18) $y = (1 + u^2)^3, u = 2x - 1, x = 3$

(صناعة) يمثل الاقتران :

$$C(x) = 1000\sqrt{x^2 - 0.1x}$$

تكلفة انتاج x قطعة من منتج معين (بآلاف الدنانير):

19) اوجد معدل تغير تكلفة الإنتاج بالنسبة إلى عدد القطع المنتجة

20) أجد معدل تغير تكلفة الإنتاج بالنسبة إلى عدد القطع المنتجة عندما يكون عدد القطع 20 قطعة.

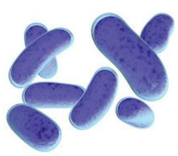
(علوم) يمثل الاقتران :

$$N(t) = 400\left(1 - \frac{3}{(t^2 + 2)^2}\right)$$

21) أجد معدل تغير N بالنسبة إلى t عندما $t = 1$

22) أجد معدل تغير N بالنسبة إلى t عندما $t = 4$

إذا كان :



$h(3) = 2, h'(3) = -2$

$g(2) = -3, g'(2) = 6$

فأجد مشتقة كل اقتران مما يأتي عندما $x = 3$.

23) $f(x) = g(h(x))$

24) $f(x) = (h(x))^3$

إذا لم تخطئ فإنك لم تحاول . وإذا لم تحاول فإنك ستبقى مكانك

0785351625

مهارات التفكير العليا

25) تبرير: إذا كان $h(x) = f(g(x))$ ، حيث: $f(u) = u^2 - 1$ ، وكان :
$g(2) = 3 , g'(2) = -1$
فأجد $h'(2)$، مبرراً إجابتي؟

26) تبرير: اجد مشتقة الاقتران: $y = (x^2 - 4)^5$ عندما $y = 0$، مبرراً إجابتي؟

27) أكتشف المختلف: أي الاقترانات الآتية مختلف مبررا إجابتي؟

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$h(x) = (x^2 + 1)^3$$

$$g(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$p(x) = x^2 + 1$$

28) تحدي:
أجد مشتقة الاقتران :

$$f(x) = \sqrt[3]{2x + (x^2 + x)^4}$$

الدرس الثاني
مشتقتا الضرب والقسمة

مشتق ضرب اقترانين:

بالكلمات:

(الأول) × (مشتقة الثاني) +(الثاني) ×(مشتقة الأول)

بالرموز:

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق فإن مشتقة ضربيهما هي:

$$(f \times g)'(x) =$$

$$f(x) \quad g'(x) \quad + \quad (g(x) \quad f'(x))$$

مشتقة الأول× الثاني + مشتقة الثاني ×الأول

أمثلة

جد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = (2x + 3)(x^2 - 5)$

الحل

$$f'(x) = (2x + 3)(2x) + (x^2 - 5)(2)$$
$$= 4x^2 + 6x + 2x^2 - 10x$$
$$= 6x^2 + 6x - 10$$

2) $f(x) = (\sqrt{x} - 1)(x^2 + 4)$

الحل

$$f'(x) = (\sqrt{x} - 1)(2x) + (x^2 + 4)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= 2x\sqrt{x} - 2x + \frac{x^2 + 4}{2\sqrt{x}}$$

لاتقل أبداً إنك سوف تفشل لأن عقلك الباطني لايأخذ الأمر بشكل هزلي بل إنه يشرع في تحقيقه

3) $f(x) = (2x-1)^2\,(4x)$

الحل

$$f'(x) = (2x-1)^2(4) + (4x)(2(2x-1)\times 2)$$
$$= (2x-1)^2(4) + (4x)(8x-4)$$
$$= (2x-1)^2(4) + 32\,x^2 - 16x$$

---

4) إذا كان $f(2) = -3$ ، $f'(2) = 5$

وكان $g(x) = x^2 f(x)$

جد $g'(2)$:

الحل

$$g'(x) = (x^2)\big(f'(x)\big) + f(x)(2x)$$
$$g'(2) = 4\,f'(x) + f(2)(4)$$
$$= 4(5) + (-3)(4)$$
$$= 20 - 12 = 8$$

---

5) إذا كان $f(x) = (x^2+2)(\sqrt{2x}-1)$

جد: $f'(2)$:

الحل

$$f'(x) = (x^2+2)\left(\frac{2}{2\sqrt{2x}}\right) + (\sqrt{2x}-1)(2x)$$

$$f'(2) = (6)\left(\frac{1}{2}\right) + (1)(4) = 3 + 4 = 7$$

---

6) $f(x) = (\sqrt[3]{x}+4)(2x-7)$

ا نجهز السؤال:

الحل

$$f(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}+4\right)(2x-7)$$
$$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}+4\right)(2) + (2x-7)\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)$$

نبسط $= 2x^{\frac{1}{3}} + 8 + \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{7}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

---

7)

إذا علمت أن:

$f(1) = 2$, $f'(1) = 3$, $g(1) = 1$, $g'(1) = 4$

جد ما يلي:

1) $(f+g)'(1)$

الحل

$$(f+g)'(1) = f'(1) + g'(1)$$
$$= 3 + 1 = 4$$

2) $(fg)'(1)$ على قانون الضرب

الحل

$$(fg)'(1) = f(1)g'(1) + g(1)f'(1)$$
$$= (2)(4) + (1)(3)$$
$$= 8 + 3 = 11$$

3) $(2f)'(1) = 2f'(1)$

الحل

$$= 2\times 3 = 6$$

4) $\big(fg(1)\big)' = 0$

قمة المجد ليست في عدم الإخفاق و الفشل بل في القيام بعد كل فشل

تمرين
تحقق من فهمك

1) أجد مشتقة كل اقتران مما يلي:

$a)\ f(x) = (x^3+4)(7x^2-4x)$

$b)\ f(x) = (\sqrt{x}+1)(3x-2)$

2) إذا علمت أن: $f(x) = x(2x+1)^3$

جد $f'(1)$

ج: 81

3) إذا علمت أن: $g(2) = -2 \quad , g'(2) = 4$

$f(2) = 1 \ , f'(2) = 3$

جد ما يلي:

$a)\ (gf)'(2)$

ج: -218

$b)\ (2g+3f)'(2$

ج: 17

$c)\ (gf(2))'$

ج: 0

مشتقات القسمة

1

مشتقة قسمة اقترانين $\left(\dfrac{\text{اقتران}}{\text{اقتران}}\right)$:

$$\frac{(\text{المقام})(\text{مشتقة البسط}) - (\text{البسط})(\text{مشتقة المقام})}{(\text{المقام})^2}$$

بالرموز: إذا كان $g(x)$, $f(x)$

قابلين للاشتقاق و $g(x) \neq 0$ فإن:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{(g(x))(f'(x)) - (f(x))(g'(x))}{(g(x))^2}$$

أمثلة

جد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

$$1)\ f(x) = \frac{x}{2x+5}$$

الحل

$$f'(x) = \frac{(2x+5)(1)-(x)(2)}{(2x+5)^2}$$
$$= \frac{2x+5-2x}{(2x+5)^2}$$
$$= \frac{5}{(2x+5)^2}$$

$$2)\ f(x) = \frac{1+x^{-5}}{x^3}$$

الحل

$$f'(x) = \frac{(x^3)(-5x^{-6})-(1+x^{-5})(3x^2)}{(x^3)^2}$$
$$= \frac{-5x^{-3}-3x^2-3x^{-3}}{x^6}$$
$$= \frac{-8x^{-3}-3x^2}{x^6}$$

على الأقل ..إذا درست وفشلت سيكون ندمك أقل الما

إذا فشلت وأنت لم تدرس

مشتقة $\left(\frac{\text{عدد}}{\text{اقتران}}\right)$: مشتقة المقلوب

بالكلمات:

$$\frac{-\ \text{العدد} \times \text{مشتقة الاقتران}}{\left(\text{الاقتران}\right)^2}$$

بالرموز: إذا كان:

$$f(x) = \frac{a}{g(x)}$$

فإن: $\rightarrow f'(x) = \frac{-a \times g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

مثال

جد مشتقة كل اقتران مما يلي:

$$1)\ f(x) = \frac{7}{3-4x}$$

الحل:

$$f'(x) = \frac{-7(-4)}{(3-4x)^2} = \frac{28}{(3-4x)^2}$$

$$2)\ f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

الحل

$$f'(x) = \frac{-1(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

مشتقة $\left(\frac{\text{اقتران}}{\text{عدد}}\right) = \frac{\text{مشتقة الاقتران}}{\text{العدد نفسه}}$

مثال

إذا كان $f(x) = \frac{2x^2-7}{8}$

جد $f'(x)$:

الحل

$$f'(x) = \frac{4x}{8}$$

$$= \frac{x}{2}$$

أمثلة متنوعة على مشتقات القسمة:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

$$1)\ f(x) = \frac{(3x+5)}{(x+1)^2}$$

الحل

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2(3) - (3x+5)\big(2(x+1)\big)}{((x+1)^2)^2}$$

$$= \frac{3(x+1)^2 - (3x+5)(2x+2)}{(x+1)^4}$$

$$2)\ f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$$

الحل

$$f'(x) = \frac{-2 \times \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{-2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{(x^2+1)^2}}$$

$$= \frac{-x^2}{2\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$$

$$3)\ f(x) = 5 + \frac{x^2+4}{6} - \frac{6}{x^2}$$

الحل

$$f'(x) = \frac{2x}{6} + \frac{6(2x)}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{x}{3} + \frac{12x}{x^4}$$

ليست خطوة واحدة عملاقة التي حققت الإنجاز انما
مجموعة خطوات صغيرة

4) جد مشتقة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

$a)\ f(x)=\dfrac{x^2-4}{2x-1} \qquad ,x=1$

الحل

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(2x)-(x^2-4)(2)}{(2x-1)^2}$$

نعوض $x=1 \rightarrow \dfrac{(1)(2)-(-3)(2)}{(1)^2}$

$$f'(1)=\frac{2+6}{1}=8$$

$b)\ f(x)=\dfrac{x+4}{\sqrt{x+4}} \qquad ,x=12$

الحل

$$f'(x)=\frac{\left(\sqrt{x+4}\right)(1)-(x+4)\left(\frac{1}{2\sqrt{x+4}}\right)}{\left(\sqrt{x+4}\right)^2}$$

نعوض $x=12$

$$f'(x)=\frac{(4)(1)-(16)\left(\frac{1}{8}\right)}{16}$$

$$=\frac{4-2}{16}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$

$c)\ f(x)=\left(\dfrac{2}{x^2+1}\right)^2 \qquad ,x=1$

الحل

$$f'(x)=2\left(\frac{2}{x^2+1}\right)^1\times\left(\frac{-2\times(2x)}{(x^2+1)^2}\right)$$

$$f'(1)=2\left(\frac{2}{2}\right)\times\left(-\frac{4}{4}\right)=2(1)(-1)$$
$$=-2$$

5) إذا علمت أن:

$f(1)=-2 \qquad ,f'(1)=4$

$g(1)=3 \qquad ,g'(1)=2$

جد مايلي:

$a)\ (\frac{f}{g})'(1)$

الحل قانون$\frac{\text{اقتران}}{\text{اقتران}}$

$$=\frac{g(1)f'(1)-f(1)g'(1)}{\left(g'(1)\right)^2}$$
$$=\frac{(3)(4)-(-2)(2)}{(3)^2}$$
$$=\frac{(12)-(-4)}{9}=\frac{16}{9}=\frac{8}{3}$$

$b)\ \left(\frac{2}{f}\right)'(1)$

الحل $\frac{\text{عدد}}{\text{اقتران}}$

$$=\frac{-2\left(f'(1)\right)}{\left(f(1)\right)^2}$$
$$=\frac{-2\,.\,4}{(-2)^2}=\frac{-8}{4}=-2$$

$c)\ (\frac{g}{4})'(1)$

الحل $\frac{\text{اقتران}}{\text{عدد}}$

$$\frac{g'(1)}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$d)\ \left(\frac{f}{g}(1)\right)'=$

الحل مشتقة ثابت $=0$

الفرق بين الناجح والفاشل هو ليس نقص القوة والمعرفة
إنما نقص الإرادة

6) اثباتات:

إذا كان:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+4x+3}$$

a) أثبت أن: $f(x) = \frac{1}{x+3}$

b) جد $f'(2)$

الحل نوحد المقامات بعد تحليل x^2+4x+3

$$f(x) = \frac{(x+3)\times 1}{(x+3)\times(x+1)} - \frac{2}{(x+1)(x+3)}$$

$$f(x) = \frac{x+3}{(x+1)(x+3)} - \frac{2}{(x+1)(x+3)}$$

$$= \frac{x+3-2}{(x+1)(x+3)}$$

$$= \frac{x+1}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{x+3}$$

$$b)\ f'(x) = \frac{-1(1)}{(x+3)^2} = \frac{-1}{(x+3)^2}$$

$$f'(2) = -\frac{1}{25}$$

7) إذا كان $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$

أثبت أن $2f'(1) = -1$

الحل

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1}{x}}} \rightarrow f'(1) = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow 2\,f'(1) = 2 - \frac{1}{2} = -1$$

تمارين على مشتقات القسمة: تحقق من فهمك

1) جد مشتقة كل من الاقترانات الآتية:

$a)\ f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

$b)\ f(x) = \frac{x^{-3}}{x^2+1}$

$c)\ f(x) = \frac{1}{1-x^3}$

$d)\ f(x) = \frac{3}{2x+1}$

$e)\ f(x) = \frac{(x^2+1)^5}{7}$

$f)\ f(x) = (x+1)(\frac{4}{x} - 2)$

النجاح لا يمكن أن يبدا من الأسبوع القادم إنما من اليوم

مشتقات الضرب والقسمة وقاعدة السلسلة:

أمثلة

1) استعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

$a)\ y = 5u^2 + 3u$

$u = \frac{18}{x^2+5} \quad , x = 2$

الحل سلسلة

نجد: $\rightarrow \frac{dy}{du} = 10u + 3$

$\rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{-18 \times (2x)}{(x^2+5)^2}$

نطبق الآن قاعدة السلسلة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= (10u+3)\left(\frac{-36x}{(x^2+5)^2}\right)$$

$$= \left(10\left(\frac{18}{x^2+5}\right)+3\right)\left(\frac{-36x}{(x^2+5)^2}\right)$$

نعوض $x = 2 \rightarrow (10(2)+3)\left(\frac{-36 \times 2}{9^2}\right)$

$$= (23)\left(-\frac{8}{9}\right) = -\frac{184}{9}$$

2) جد مشتقة الاقترانات الآتية عند قيمة x المعطاة.

$a)\ f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} \quad , x = 1$

ج: 1

$b)\ f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-1} \quad , x = -1$

ج: -1

$c)\ f(x) = \frac{\sqrt{2x-2}}{2} \quad , x = 3$

ج: $\frac{1}{4}$

3) إذا علمت أن: $f(1) = 3 \quad , \quad f'(1) = 4$
$g(1) = 5 \quad , \quad g'(1) = 2$

جد ما يلي:

$a)\ \left(\frac{f}{g}\right)'(1)$

ج: $\frac{14}{25}$

$b)\ \left(\frac{2}{3f}\right)'(1)$

ج: $-\frac{24}{81}$

$c)\ \left(\frac{2f}{g}\right)'(1)$

ج: 0

لا تنظر إلى ماتم إنجازه.....

بل انظر إلى مالم يتم انجازه

$b)\ y = u^2(u+1)^2$

$u = \dfrac{2}{x} \quad , \quad x = 2$

الحل

$$\rightarrow \frac{dy}{du} = (u^2)\big(2(u+1)\big) + (u+1)^2(2u)$$
$$= u^2(2u+2) + (u+1)^2(2u)$$
$$\rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{2}{x^2}$$
$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$
$$= \big(u^2(2u+2) + (u+1)^2(2u)\big)\left(-\frac{2}{x^2}\right)$$

الآن للتسهيل وبدل أن نعوض قيمة u بالسؤال لأنها كثيرة نجد قيمة u ثم نعوضها.

$$x = 2 \ \rightarrow u = \frac{2}{x}$$
$$u = \frac{2}{2} = 1$$

نعوض الآن $u = 1 \quad , x = 2$

$$\frac{y}{dx} = \big(1(4) + (4)(2)\big)\left(-\frac{2}{4}\right)$$
$$= (4+8)\left(-\frac{2}{4}\right)$$
$$= 12\left(-\frac{2}{4}\right)$$
$$= -6$$

$3)\ f(x) = (3x-5)^4(7-x)^{10}$

جد $f'(x)$:

الحل

مشتقة ضرب

$$f'(x) = (3x-5)^4(10(7-x)^9(-1) + (7-x)^{10}\big(4(3x-5)^3(3)\big)$$
$$= -10(7-x)^9(3x-5)^4 + 12(3x-5)^3(7-x)^{10}$$

$4)\ f(x) = \dfrac{4x+3}{(2x-1)^3}$

الحل

$$f'(x) = \frac{(2x-1)^3(4) - (4x-3)\big(3(2x-1)^2(2)\big)}{(2x-1)^6}$$
$$= \frac{4(2x-1)^3 - 6(4x-3)(2x-1)^2}{(2x-1)^6}$$

$5)\ f(x) = x(x+1)^5(x^2+2)^6$

الحل

مشتقة ضرب

$$\underset{\text{الأول}}{x(x+1)^5} \qquad \underset{\text{الثاني}}{(x^2+2)^6}$$

$$f'(x) = \big(x(x+1)^5\big)\big(6(x^2+2)^5(2x)\big)$$
$$+\big((x^2+2)^6\big)\big((x)\big(5(x+1)^4 + (x+1)^5(1)\big)$$

تمارين: تحقق من فهمك

1) جد $\frac{dy}{dx}$ للإقترانات الآتية عند قيمة x المعطاة.

$a)\ y = \dfrac{2}{u^2+1} \quad , \quad u = x^2 - 2$

عندما $x = 1$

ج: 2

$b)\ y = \dfrac{u^2+2u}{2} \quad , \quad u = x - x^2$

عندما $x = 1$

ج: -1

2) جد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

$a)\ f(x) = 20x\,(4x^3-1)^6$

$b)\ f(x) = \dfrac{x^2-1}{(x+2)^4}$

في كلمة القمة شيء يقول لك قم ....

ادرس

0785351625

أسئلة المجاهيل

1) إذا علمت أن:

$$f(x) = 2ax^2 + 2x$$

جد قيمة الثابت a علماً أن:

$$f'(2) = 10$$

الحل

$$f'(x) = 4ax + 2$$

$$f'(2) = 8a + 2 = 10$$

$$\rightarrow 8a = 8 \rightarrow a = 1$$

---

2) إذا كان: $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$

جد قيمة x عندما:

$$f'(x) = 0$$

الحل

$$f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} = 0$$

$$2x + 2 = 0$$

$$2x = -2 \rightarrow x = -1$$

---

3) إذا علمت أن:

$$f(x) = \frac{2}{2x^2 - 4x}$$

جد قيمة x عندما

$$f'(x) = 0$$

الحل

$$f'(x) = \frac{-2(4x-4)}{(2x-4x)} = 0$$

$$\rightarrow \ -2(4x-4) = 0$$

$$\rightarrow \ -8x + 8 = 0$$

$$\rightarrow x = 1$$

---

4) ((رهيب....فتّاك))

إذا كان $f(x) = \frac{2x+8}{\sqrt{x}}$

جد قيمة x عندما $f'(x) = 0$

الحل

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{\left((\sqrt{x})(2) - (2x+8)\left(\frac{1}{2}\sqrt[2]{x}\right)\right)}{(\sqrt{x})^2} = 0$$

$$\rightarrow 2\sqrt{x} - \frac{2x+8}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$\rightarrow 2\sqrt{x} = \frac{2x+8}{2\sqrt{x}}$$

$$\rightarrow 4x = 2x + 8$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$$

$$\rightarrow x = 4$$

عليك أن تفعل الأشياء اليت تعتقد إنه ليس بإمكانك أن تفعلها

0785351625

من الحياة

تذكر أن المشتقة هي معدّل تغير كمية ما بالنسبة إلى كمية أخرى عند لحظة معينة.

أمثلة

1) دواء:

يمثل الاقتران: $c(t)=\frac{2t}{3t^2+16}$

تركيز مسكن للألم في دم مريض بعد t ساعة من تناوله، حيث c مقيسة بوحدة Mg/ml:

a) أجد معدّل تغير تركيز المسكن في دم المريض بالنسبة إلى الزمن t.

الحل

نجد $c'(t)$

$$c'(t)=\frac{(3t^2+16)(2)-(2t)(6t)}{(3t^2+16)^2}$$

$$=\frac{6t^2+32-12t^2}{(3t^2+16)^2}$$

$$=\frac{32-6t^2}{(3t^2+16)^2}$$

b) جد معدل تغير تركيز المسكن في دم المريض عندما $t=1$

الحل

$$c'(t)=\frac{32-6(1)^2}{(3(1)^2+16)^2}$$

$$\approx 0.092$$

2) سكان:

يمثل عدد سكان مدينة صغيرة بالاقتران

$$p(t)=20-\frac{6}{t+1}$$

حيث t الزمن بالسنوات من الآن و p عدد السكان بالآلاف:

a) جد معدل تغير نمو السكان بالنسبة إلى الزمن t.

b) جد معدل نمو السكان في المدينة عندما $t=9$.

الحل

a) نجد $p'(t)$

$$p'(t)=\frac{6}{(t+1)^2}$$

b) نجد $p'(9)$

$$p'(9)=\frac{6}{(9+1)^2}=\frac{6}{100}$$

تمرين: تحقق من فهمك

سكان: يمثل عدد سكان بلدة صغيرة بالاقتران:

$p(t)=\frac{5}{2t^2+9}$ ، حيث t الزمن بالسنوات منذ الآن، p عدد السكان.

a) جد معدل تغير عدد السكان بالنسبة إلى الزمن t.

b) جد معدل تغير عدد السكان عندما $t=2$.

ج: a) $\frac{-20t}{(2t^2+9)^2}$ b) $-\frac{40}{17^2}$

أتدرب وأحل المسائل: (أسئلة الكتاب صفحة 71)

أجد مشتقة كل إقتران مما يأتي:

1) $f(x) = x(1+3x)^5$

2) $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$

3) $f(x) = (2x+1)^5(3x+2)^4$

4) $f(x) = \dfrac{3x^2}{(2x-1)^2}$

5) $f(x) = \dfrac{6x}{\sqrt{5x+3}}$

6) $f(x) = (4x-1)(x^2-5)$

7) $f(x) = \frac{x^2+6}{2x-7}$

8) $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$

9) $f(x) = (x+1)\sqrt{x-1}$

10) $f(x) = \frac{x}{5+2x} - 2x^4$

11) $f(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$

12) $f(x) = (x+\frac{2}{x})(x^2-3)$

13) $f(x) = (8x+\sqrt{x})(5x^2+3)$

14) $f(x) = 5x^{-3}(x^4-5x^3+10x-2)$

أجد مشتقة كل إقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة.

15) $f(x) = x^2(3x-1)^3 \,, x = 1$

16) $f(x) = 3x\sqrt{5-x} \,, x = 4$

17) $f(x) = \frac{x-1}{2x+1} \,, x = 2$

18) $f(x) = (2x+3)(x-2)^2 \,, x = 0$

أعمال: يمثل الاقتران: $S(t) = \frac{2000t}{4+0.3t}$ إجمالي المبيعات (بآلاف الدنانير) لشركة جواهر وحلي، حيث (t) عدد السنوات بعد عام 2020م.

19) أجد معدل تغير اجمالي المبيعات للشركة بالنسبة للزمن (t).

20) أجد معدل تغير غجمالي المبيعات للشركة عام 2030م، مفسراً معنى الناتج.

سكان: يمثل عدد سكان بلدة صغيرة بالاقتران :

$$p(t) = 12(2t^2+100)(t+20)$$

حيث (t) الزمن بالسنوات منذ الأن ، و p عدد السكان بالالاف :

21) أجد معدل تغير عدد السكان في البلدة بالنسبة إلى الزمن t.

22) أجد معدل تغير عدد السكان في البلدة عندما $t = 6$، مفسرا معنى الناتج.

تفاعلات : يمكن نمذجة كتلة مركب في أثناء تفاعل كيميائي باستعمال الاقتران:

$$m(t) = \frac{5.8t}{t+1.9}$$

حيث t الزمن بالثواني بعد بدء التفاعل، وM الكتلة بالغرام.

23) أجد معدل تغير كتلة المركب بعد 5 ثواني من بدء التفاعل.

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

24) $y = u(u^2+3)^3 \,, u = (x+3)^2 \,, x = -2$

25) $y = \frac{u^3}{u+1} \,, u = (x^2+1)^3 \,, x = 1$

عندما تعطيك الحياة سبباً لتيأس . أعطها ألف سبب للاستمرار

0785351625

إذا كان: $f(x) = 4, f'(2) = -1$

$g(2) = 3, g'(2) = 2$

فأجد كلاً مما يأتي:

26) $(fg)'(2)$

27) $(\frac{f}{g})'(2)$

28) $(3f + fg)'(2)$

مهارات التفكير العليا

29) تحدٍ: أجد مشتقة الاقتران :

$$f(x) = x(4x-3)^6(1-4x)^9$$

تبرير: إذا كان :

$$f(x) = \frac{2x}{x+5} + \frac{6x}{x^2+7x+10}$$

فأجب عن السؤالين الآتيين :

30) أثبت أن $f(x) = \frac{2x}{x+2}$ ، مبرراً إجابتي.

31) أجد $f'(3)$.

32) تبرير: إذا كان: $f(x) = \frac{2x+8}{\sqrt{x}}$ ، فأجد قيمة x عندما $f'(x) = 0$، مبرراً إجابتي.

الدرس الثالث

مشتقتا الاقتران الأسي الطبيعي والاقتران اللوغريتمي والطبيعي

مشتقة الاقتران الأسي الطبيعي:

قانون: إذا كان: $f(x) = e^x$

فإن $f'(x) = e^x$

حيث e^x هو الاقتران الأسي الطبيعي و $e \approx 2.7$

قانون عام:

←إذا كان: $f(x) = e^{g(x)}$ فإن:

$f'(x) = e^{g(x)} \times g'(x)$

بالكلمات:

مشتقة الاقتران الأسي

نفسه × مشتقة الأس

أمثلة

جد مشتقة كل اقتران مما يلي:

1) $f(x) = e^x$

الحل $f'(x) = e^x$

2) $f(x) = 5e^x + 4x^2$

الحل $f'(x) = 5e^x + 8x$

3) $f(x) = e^{4x} + 7$

الحل $f'(x) = 4e^{4x}$

كن عالي الهمة ولا ترضى بغيرالقمة

0785351625

4) $f(x) = e^{x^2+2}$

الحل

$f'(x) = e^{x^2+2} \times 2x$

5) $f(x) = 3e^{\frac{2}{x}}$

الحل

$f'(x) = 3e^{\frac{2}{x}} \times -\frac{2}{x^2}$

$= -\frac{6}{x^2} e^{\frac{2}{x}}$

6) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

الحل

$f'(x) = e^{\sqrt{x}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

7) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$

الحل

$f'(x) = \frac{(x+1)(e^x) - (e^x)(1)}{(x+1)^2}$

$= \frac{xe^x + e^x - e^x}{(x+1)^2}$

$= \frac{xe^x}{(x+1)^2}$

8) $f(x) = e^{2x}(2x+4)^5$

الحل

مشتقة ضرب

$f'(x) = (e^{2x})\big(5(2x+4)^4(2)\big)$

$+ (2x+4)^5(e^{2x} \times 2)$

$= (e^{2x})(10)(2x+4)^4) + (2x+4)^5\ 2e^{2x}$

تمرين: تحقق من فهمك

أجد مشتق كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = e^{x^3}$

2) $f(x) = e^{7x+1}$

3) $f(x) = 2e^{\sqrt{x}}$

4) $f(x) = \sqrt[3]{x} + e^x$

5) $f(x) = xe^x$

6) $f(x) = 2e^x + 3$

7) $f(x) = \sqrt{e^{2x}+1}$

8) $f(x) = \frac{2}{e^{x^2}}$

9) $f(x) = (e^{5x} - 2)^3$

10) $f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{x}}$

ربما تفشل إذا حاولت ولكن من المؤكد أنك ستفشل إن لم تحاول

0785351625

أمثلة من الحياة
على مشتقة الاقتران الأسي

1) حرارة: تمثل المعادلة:

$$T(t) = 18 + 12e^{0.002t}$$

درجة حرارة الحساس في جهاز إلكتروني (بالسيلسيوس) c° بعد t ساعة من بدء تشغيل الجهاز.

a) جد معدل تغير درجة حرارة الحساس بالنسبة للزمن t .

b) جد معدل تغير درجة حرارة الحساس بعد 5 ساعات من بدء تشغيل الجهاز.

الحل

a) نجد $T'(t)$

$$T'(t) = 12e^{0.002t} \times (0.002)$$
$$= 0.024\, e^{0.002t}$$

b) نجد $T'(5)$

$$T'(5) = 0.024\, e^{0.002(5)}$$
$$\approx 0.024$$

2) قمر صناعي: تستعمل مادة مشعة لتزويد قمر صناعي بالطاقة ويمكن نمذجة مقدار الطاقة المتبقية في المادة المشعة (بالواط) باستعمال الاقتران:

$$p(t) = 50e^{-0.004t}$$

حيث t الزمن بالأيام، جد معدل تغير الطاقة المتبقية في القمر الصناعي بعد 500 يوم.

الحل

$$p'(t) = 50e^{-0.004t} \times -0.004$$

$$p'(500) = 50e^{-0.004(500)} \times -0.004$$

$$\approx 0.027$$

تمرين: تحقق من فهمك

يمثل الاقتران:

$$N(t) = 1000\left(30 + e^{-\frac{t}{30}}\right)$$

عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع بكتيري:

a) جد العدد الأولي للخلايا البكتيرية في المجتمع.

b) جد معدل تغير عدد الخلايا البكتيرية بالنسبة للزمن.

c) جد معدل نمو المجتمع بعد 20 ساعة.

ج:

a) 1031

b) $-\frac{100}{3}e^{-\frac{t}{30}}$

c) $-\frac{100}{3}e^{\frac{2}{3}}$

إننا نصنع مصائرنا..

إننا نصبح ما نفعله

0785351625

اسئلة على الطاير: دمج أسي+ سلسلة

استعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

1) $y = e^{3u+2}$, $u = 2x^3 + 1$

الحل

$\frac{dy}{du} = 3e^{3u+2}$, $\frac{du}{dx} = 6x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= (3e^{3u+2})(6x^2)$$

$$= \left(3e^{3(2x^3+1)+2}\right) \times (6x^2)$$

$$= \left(3e^{6x^3+5}\right)(6x^2) = 18x^2 e^{6x^3+5}$$

تمرين

(سؤال مخ)

2) $m = 8x^3$, $m = e^{2y}$

جد $\frac{dy}{dx}$ عندما $y = 0$

ج:3

اجعل من أخطائك خبرات

0785351625

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

قاعدة:
إذا كان: $f(x) = \ln x$ حيث $x > 0$
فإن: $f`(x) = \frac{1}{x}$

قانون عام:
إذا كان: $f(x) = \ln g(x)$
فإن: $f`(x) = \frac{g`(x)}{g(x)}$
بالكلمات:

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي = مشتقة ما داخل اللوغاريتم/ ما داخله نفسه.

أمثلة

جد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = 9\ln x$

الحل

$f`(x) = \frac{9}{x}$

2) $f(x) = x^{\frac{3}{5}} + \ln x$

الحل

$f`(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{-2}{5}} + \frac{1}{x}$

3) $f(x) = x\ln x$

الحل

مشتقة ضرب:

$$f`(x) = (x)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1)$$
$$= 1 + \ln x$$

4) $f(x) = \ln(5x^2 + 7)$

الحل

$$f`(x) = \frac{10x}{5x^2 + 7}$$

5) $f(x) = 3\ln(x^3)$

الحل

$$f`(x) = 3 \times \frac{3x^2}{x^3}$$
$$f`(x) = \frac{9}{x}$$

6) $f(x) = \ln\sqrt{x}$

الحل

$$f`(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$
$$f`(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

7) $f(x) = \ln(x^2 + 2)^3$

الحل

$$f`(x) = \frac{3(x^2+2)^2.(2x)}{(x^2+2)^3}$$
$$f`(x) = \frac{6x(x^2+2)^2}{(x^2+2)^3}$$
$$= \frac{6x}{(x^2+2)}$$

8) $f(x) = e^x + e^5 + \ln 5 + \ln x$

الحل

$$f`(x) = e^x + 0 + 0 + \frac{1}{x}$$
$$= e^x + \frac{1}{x}$$

حلمك ليس له تاريخ انتهاء...

خذ نفساً عميقاً وحاول مرة أخرى

0785351625

9) $f(x) = \ln\frac{2}{x}$

الحل

$$f`(x) = \frac{\frac{-2}{x^2}}{\frac{2}{x}}$$

$$= \frac{-2}{x^2} \times \frac{x}{2} = \frac{-1}{x}$$

10) $f(x) = \frac{e^{x^2+1}}{\ln x}$

الحل

مشتقة قسمة:

$$f`(x) = \frac{(\ln x)(2x.e^{x^2+1}) - (e^{x^2+1})\left(\frac{1}{x}\right)}{(\ln x)^2}$$

11) $f(x) = \frac{e}{\ln x}$

الحل

ملاحظة: e عدد ثابت

$$f`(x) = \frac{-e(\frac{1}{x})}{\ln x} = \frac{\frac{-e}{x}}{\ln x}$$

$$= \frac{-e}{x} \times \frac{1}{\ln x} = \frac{-e}{x\ln x}$$

12) $f(x) = e^{2x-1}\ln(2x-1)$

جد $f`(x)$

الحل

$$f`(x) = (e^{2x-1})\left(\frac{2}{2x-1}\right) + (\ln(2x-1)(2e^{2x-1})$$

الآن نعوض مكان $x = 1$

$$f`(1) = (e)\left(\frac{2}{1}\right) + (\ln(1)(2e)$$

$$= 2e + 0 = 2e$$

13) $f(x) = x^2e^{-1}$

جد $f`(x)$ عند $x = -1$

الحل e^{-1} ثابت

$$f`(x) = 2e^{-1}.x = \frac{2x}{e}$$

نعوض $x = -1$

$$f`(-1) = \frac{-2}{e}$$

14) $f(x) = \ln(x^2+1), x = 3$

الحل

$$f`(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

نعوض $x = 3$:

$$f`(3) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

15) $f(x) = \ln(\frac{e^x+1}{x})$

الحل

$$f`(x) = \frac{\frac{(x)(e^x)-(e^x+1)(1)}{x^2}}{\frac{e^x+1}{x}}$$

$$f`(x) = \frac{xe^x - e^{x+1}}{x^2} \times \frac{x}{e^{x+1}}$$

$$= \frac{xe^x - e^{x+1}}{x\,e^{x+1}}$$

16) $f(x) = (\ln x + e^{2x})^4$

الحل

$$f`(x) = 4(\ln x + e^{2x})^3 \times (\frac{1}{x} \times 2e^{2x})$$

ليس هناك أسرار للنجاح فهو حصيلة الإعداد الجيد والعمل الشاق

تمارين: تحقق من فهمك

جد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$

2) $f(x) = \frac{\ln x}{3x}$

3) $f(x) = \ln 8x$

4) $f(x) = 2\ln(x^7)$

5) $f(x) = \ln 5 + e^7$

6) $f(x) = \ln 5x + e^{7x}$

7) $f(x) = \frac{e^x}{x^6}$

8) $f(x) = e^{2x}\ln(x^2+2)$

9) $f(x) = (\ln x + e^{2x})^5$

10) $f(x) = 2e^x + \ln(x+1)$

جد $f`(0)$.

ج: 3

11) $f(x) = \sqrt{x}\ \ln x$

جد $f`(x)$ عند $x = 1$

ج: 1

12) $f(x) = 2x + \frac{2x}{e^x}$

جد $f`(x)$ عند $x = 0$

ج: 4

13) $f(x) = x\ln x$

جد $f`(x)$ عند $x = e$

تذكر أن: $\ln e = 1$

ج: 2

ثمرة النجاح تأتي من الصبر الطويل

0785351625

من الحياة

إعلانات: يمكن نمذجة درجة استجابة المستهلك لمنتج ما عن طريق الاعلانات باستعمال الاقتران:

$$N(a) = 2000 + 500 \ln a \, , a \geq 1$$

الذي يمثل عدد الوحدات المبيعة من المنتج، حيث a المبلغ الذي أنفق على الإعلانات بآلاف الدنانير.

a) جد معدل تغير عدد الوحدات المبيعة بالنسبة إلى المبلغ a الذي أنفق على الإعلانات بآلاف الدنانير.

b) جد معدل تغير عدد الوحدات المبيعة عندما $a = 10$

الحل

a. نجد N`(a)

$$N`(a) = \frac{500}{a}$$

b. نعوض $a = 10$

$$N`(10) = \frac{500}{10} = 50$$

تمرين

في المثال السابق إذا كانت:

$$N(a) = 3000 + 600 \ln a$$

جد معدل التغير عندما $a = 20$.

ج:30

أسئلة فتاكة على الدرس:

1) استعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لما يلي ، عندما $x = 0$.

$$y = \ln(u+2), u = e^{2x}$$

الحل

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u+2} \, , \frac{du}{dx} = 2e^{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \left(\frac{1}{u+2}\right)(2e^{2x})$$

$x = 0$

u=1

$$= \left(\frac{1}{1+2}\right)(2e^{0})$$

$$= \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$$

2) إذا كان $y = \frac{6\ln x - x^3}{e^{2x}}$

أثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{5}{e^2}$ عندما $x = 1$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^{2x})\left(\frac{6}{x} - 3x^2\right) - (6\ln x - x^3)(2e^{2x})}{(e^{2x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx_{(x=1)}} = \frac{3e^2 - (0-1)(2e^2)}{(e^2)^2}$$

$$= \frac{3e^2(2e^2)}{e^4} = \frac{5e^2}{e^4} = \frac{5}{e^2}$$

كل شيء ثمن ... وثمن النجاح هو الإجتهاد والإرادة

0785351625

تدرب وأحل المسائل (أسئلة الكتاب ص80)

أجد مشتقة كل إقتران مما يأتي:

1) $f(x) = 2e^x + 1$

2) $f(x) = e^{3x+9}$

3) $f(x) = (x^2 + 3x - 9)e^x$

4) $f(x) = \frac{e^x}{x^4}$

5) $f(x) = 6e^{\sqrt{x}}$

6) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

7) $f(x) = (e^x + 2)(e^x - 1)$

8) $f(x) = e^{-2x}(2x - 1)^5$

9) $f(x) = x^3 - 5e^{2x}$

أجد مشتقة كل إقتران مما يأتي:

10) $f(x) = 3\ln x$

11) $f(x) = x^3 \ln x$

12) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

13) $f(x) = x^2 \ln(4x)$

14) $f(x) = \ln(\frac{x+1}{x})$

15) $f(x) = \ln\sqrt{x^2 - 1}$

16) $(x) = (\ln x)^4$

17) $f(x) = \ln(x^2 - 5)$

18) $f(x) = x^4 \ln x - \frac{1}{2}e^x$

19) $f(x) = e^{2x} \ln x$

20) $f(x) = (\ln 3x)(\ln 7x)$

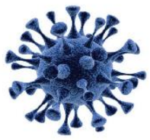
21) $f(x) = \ln(e^x - 2)$

أجد مشتقة كل إقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

22) $f(x) = e^{2x-1}\ln(2x - 1)\ ,\ x = 1$

23) $f(x) = \frac{\ln x^2}{x}\ , x = 4$

24) فيروسات: يمكن نمذجة انتشار الانفلونزا في احدى المدارس باستعمال الاقتران: $p(t) = \frac{100}{1+e^{3-t}}$ ، حيث $p(t)$ العدد الكلي للطلبة المصابين بعد t يوماً من ملاحظة الانفلونزا في المدرسة اول مرة. أجد سرعة انتشار الانفلونزا في المدرسة بعد 3 أيام.



25) ذاكرة: يستعمل الاقتران :

$m(t) = t\ln t + 1,\ 0 < t \le 4$، لقياس قدرة الأطفال على التذكر، حيث m مقياس من1 على 7، وt عمر الطفل بالسنوات.اجد معدل تغير قدرة الأطفال على التذكر بالنسبة إلى عمر الطفل t.

استعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

26) $y = e^{2u} + 3\ ,u = x^2 + 1$

27) $y = \ln(u + 1),\ \ u = e^x$

مهارات التفكيرالعليا

28) أكتشف الخطأ: أكتشف الخطأ في الحل الآتي ثم أصحِّحه:

$$y = \ln kx$$

$$\frac{dy}{dx} = k\ln kx$$

29) تبرير:

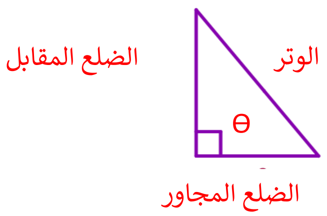
إذا كان : $y = \frac{7\ln x - x^3}{e^{3x}}$، فأثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{7}{e^3}$ عندما $x = 1$.

نافس نفسك ... لاتدرس لتكون فقط الأول على أقرانك

الدرس الرابع

مشتقة اقتران الجيب واقتران جيب تمام

إذا مثلث θ قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية، فإن اقتراني الجيب وجيب التمام يعرّفان بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور كما يلي:



- الجيب $\sin\theta$

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

- جيب التمام $\cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

قاعدة الاشتقاق:

1- إذا كان $f(x) = \sin x$
فإن: $f`(x) = \cos x$

2- إذا كان $f(x) = \cos x$
فإن $f`(x) = -\sin x$

أمثلة

جد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = 2\sin x$

الحل

$$f`(x) = 2\cos x$$

2) $f(x) = x^2 + \cos x + 2$

الحل

$$f`(x) = 2x - \sin x$$

3) $f(x) = \frac{\sin x}{x} - 2\cos x$

الحل

$$f`(x) = \frac{\cos x}{x} + 2\sin x$$

4) $f(x) = x^2 \sin x$

الحل

مشتقة ضرب:

$$f`(x) = (x^2)(\cos x) + (\sin x)(2x)$$
$$f`(x) = x^2\cos x + 2x\sin x$$

5) $f(x) = \frac{1+\cos x}{\sin x}$

الحل

$$f`(x) = \frac{(\sin x)(-\sin x) - (1+\cos x)(\cos x)}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos x - \cos^2 x}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{-(\sin^2 x + \cos x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$

ملاحظة:
متطابقة $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

6) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

الحل

$f(x) = 1 \rightarrow f`(x) = 0$

7) $f(x) = \sin x \,.\, \ln(2x+1)$

الحل

$f`(x) = (\sin x)\left(\frac{2}{2x+1}\right) + \ln(2x+1)\,(\cos x)$

8) $f(x) = \frac{2}{\cos x} + e^{\sin x}$

$f`(x) = \frac{-2(-\sin x)}{\cos^2 x} + \cos x\, e^{\sin x}$

$\frac{2 \sin x)}{\cos^2 x} + \cos x\, e^{\sin x}$

9) $f(x) = \sin x \;\cos x$

الحل

$f`(x) = (\sin x)(-\sin x) + (\cos x)(\cos x)$

$= -\sin^2 x + \cos^2 x$

$= \cos^2 x - \sin^2 x$

10) $f(x) = \sin^2 x$

الحل

نجهز

$f(x) = (\sin x)^2$

$f`(x) = 2(\sin x)\cos x$

تمارين: تحقق من فهمك

جد مشتقة الاقترانات الآتية:

1) $f(x) = 3x - \cos x$

2) $f(x) = 3\sin x + 2\cos x$

3) $f(x) = e^{2x} \cos x$

4) $f(x) = \frac{x+\cos x}{\sin x}$

5) $f(x) = \sqrt{\sin x}$

6) $f(x) = \cos^3(x)$

7) $f(x) = x \sin^5 x$

أعظم النجاحات تأتي بعد أشق العثرات

0785351625

مشتقة الجيب وجيب التمام وقاعدة السلسلة:

قاعدة:

1- إذا كان: $f(x) = \sin(g(x))$

فإن:

$$f`(x) = \cos(g(x)) * g`(x)$$

2- إذا كان: $f(x) = \cos(g(x))$

فإن:

$$f`(x) = -\sin(g(x)) * g`(x)$$

بالكلمات:

مشتقة خارجي (داخلي)=

مشتقة الخارجي (الداخلي كما هو)* مشتق الداخلي.

أمثلة

1) $f(x) = \sin 5x$

الحل

$$f`(x) = \cos(5x) \times 5 = 5\cos 5x$$

2) $f(x) = \cos(2x^2+5)$

الحل

$$f`(x) = -\sin(2x^2+5)\text{خ}4x = -4x\sin(2x^2+5)$$

3) $f(x) = \sin e^{2x}$

الحل

$$f`(x) = \cos e^{2x} \times (2e^{2x})$$

4) $f(x) = e^{\sin 2x}$

الحل

$$f`(x) = \cos 2x \times 2 \times e^{\sin 2x} = 2\cos 2x\, e^{\sin 2x}$$

1) $f(x) = \ln(\cos 5x)$

الحل

$$f`(x) = \frac{-\sin 5x \times 5}{\cos 5x}$$

$$f`(x) = \frac{-5\sin 5x}{\cos 5x}$$

2) $f(x) = \sqrt{\sin 3x}$

الحل

$$f`(x) = \frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$$

3) $f(x) = \frac{\cos x^2}{e^x}$

الحل

$$f`(x) = \frac{(e^x)(\sin x^2) \times (2x) - (\cos x^2)(e^x)}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{(2xe^x \sin x^2) - e^x \cos x^2}{e^{2x}}$$

4) $f(x) = \cos(\sin 2x)$

الحل

$$f`(x) = -\sin(\sin 2x) \times (\cos 2x \times 2) = -2\sin(\sin 2x)\cos(2x)$$

إذا كان ماتفعله لا يقربك من بلوغ هدفك فهو بلا شك يبعدك عنه

0785351625

5) $f(x) = \cos(1-2x)^2$

الحل

$$f`(x) = -\sin(1-2x)^2 \times (2(1-2x)^1 \times -2)$$
$$= 4(1-2x)\sin(1-2x)^2$$

6) $f(x) = \sin^3(2x)$

الحل لكن هون جهز:

$$f(x) = (\sin(2x))^2$$

$$f`(x) = 3(\sin(2x))(\cos(2x) \times 2)$$
$$= 6\sin(2x)\cos(2x)$$

7) $f(x) = \ln(\cos^7(3x))$

الحل تجهيز $(\cos(3x))^7$

$$f`(x) = \frac{7(\cos(3x))^6 + (-\sin(3x) \times 3)}{\cos^7(3x)}$$

$$= \frac{-21\ \cos^6(3x)\sin(3x)}{\cos(3x)}$$

8) $f(x) = \frac{x\sin x}{1+x}$

الحل مشتق قسمة ولكن دير بالك الفخ (جوا مشتقه ضرب

$$f`(x) = \frac{(1+x)(x)(\cos x) + (\sin x)(1) - (x\sin x)(1)1}{(1+x)^2}$$

9) $f(x) = \sin^3 x \cos 4x$

الحل $f(x) = (\sin x)^3 \cos 4x$ جهز

$$f`(x) = (\sin x)^3\,(-4\sin 4x) + (\cos 4x)$$
$$\times\,(3\,(\sin x)^2\,(\cos x)$$

10) $f(x) = \sin(\frac{e^x}{1+e^x})$

الحل

$$f`(x) = \cos\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$$
$$\times\left(\frac{(1+e^x)(e^x) - (e^x)(e^x)}{(1+e^x)^2}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) \times \left(\frac{e^x + e^{2x} - e^{2x}}{(1+e^x)^2}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) \times \left(\frac{e^x}{(1+e^x)^2}\right)$$

11) $f(x) = (\ln e^{\sin 2x})^2$

الحل تذكر

$\boxed{x = \ln e^x \text{ هام}}$

$$f(x) = (\sin 2x)^2$$
$$f`(x) = 2(\sin 2x) \times \cos 2x) \times 2$$
$$= 4\sin 2x \times \cos 2x$$

كي تكون ناجحاً عليك أن تثق بنفسك حيث يشك بك الأخرون

تمارين: تحقق من فهمك

جد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \cos 5x^2$

2) $f(x) = \sqrt{\sin 7x}$

3) $f(x) = \ln \cos 9x$

4) $f(x) = e^{\sin 7x}$

5) $f(x) = \sin \sqrt{x}$

6) $f(x) = \sin^3(4x + 2)$

7) $f(x) = \sin x (\ln x)^2$

8) $f(x) = \ln e^{\cos 4x}$

9) $f(x) = \sin(\frac{(x^2+1)^2}{e^x})$

من الحياة:

عجلة دوارة:

يمثل الاقتران

$$h(t) = 85 \sin \frac{\pi}{20}(t - 10) + 90$$

الارتفاع بالأقدام لشخص يركب في عجلة دوارة حيث t الزمن بالثواني. جد معدل تغير ارتفاع الشخص بالنسبة للزمن t.

الحل

معدل تغير ارتفاع الشخص بالنسبة لزمن هو $h`(t)$.

$$h`(t) = 85 \cos \frac{\pi}{20}(t - 10) \times \frac{\pi}{20}$$

$$h`(t) = 85 \frac{\pi}{20} \cos \frac{\pi}{20}(t - 10)$$

حيوانات مفترسة:

يمثل الاقتران:

$$D(t) = 500 + 200 \sin(D \times 4(t - 2))$$

عدد الحيوانات المفترسة في أحد الغابات بعد t سنة منذ بدء دراسة ما، جد معدل تغير عدد الحيوانات المفترسة بالنسبة إلى الزمن t.

الحل

$$D`(t) = 200 \cos\big(0.4(t - 2)\big) \times 0.4$$

$$D`(t) = 80 \cos(0.4(t - 2))$$

تخيل لذة النجاح ..هذه وحدها تساهم كثيراً في نجاحك

وقود:
يمثل الاقتران:

$$l(t) = 30 + 21.6\sin(\frac{2\pi t}{365} + 10.9)$$

الاستهلاك اليومي من الوقود (باللترات) لإحدى السيارات، حيث t الزمن بالأيام.
جد معدل تغير استهلاك السيارة للوقود بالنسبة إلى الزمن t.

الحل

$$l`(t) = 21.6\cos\left(\frac{2\pi t}{365} + 10.9\right) \times \frac{2\pi t}{365}$$

$$= \frac{51.2\pi}{365}\cos\left(\frac{2\pi t}{365} + 10.9\right)$$

تحقق من فهمك

حيوانات: يمثل الاقتران:

$$D(t) = 1500 + 800\sin 0.4t$$

عدد الحيوانات في إحدى الغابات بعد t سنة منذ بدء دراسة عليها. جد معدل تغير عدد الغزلان في الغابة بالنسبة إلى الزمن t.

ج: $320\cos 0.4t$

أسئلة قوة على الدرس

1- جد مشتقة الاقتران:

$$f(x) = e^x \sin^2 x \cos 2x$$

الحل

$$f(x) = (e^x \cos 2x)(\sin x)^2$$

رتبنا الاقتران لحاصل ضرب اقترانين

$$f`(x) = (e^x \cos 2x)(2(\sin x)(\cos x))$$
$$+(\sin x)^2((e^x)(-2\sin 2x) + (\cos 2x)(e^x))$$

2- إثباتات:
الإثباتات الآتية معتمدة على المتطابقات:

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

3) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

---

a) إذا علمت أن:

$$y = x + \sin x \cos x$$

أثبت أن:

$$\frac{dy}{dx} = 2\cos^2 x$$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = 1 + (\sin x)(-\sin x) + (\cos x)(\cos x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$= \cos^2 x + \cos^2 x = 2\cos^2 x$$

إذا تعلمت من الخطأ فإنك لم تخطأ أبداً

0785351625

b) إذا كان:

$$y = 2(x - \sin x \cos x)$$

أثبت أن:

$$\frac{dy}{dx} = 4\sin^2 x$$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = 2(1 - ((\sin x)(-\sin x) + (\cos x)(\cos x))$$

$$= 2(1 + \sin^2 x - \cos^2 x)$$

$$= 2(\sin^2 x + \sin^2 x)$$
$$= 2(2\sin^2 x)$$
$$= 4\sin^2 x$$

---

c) إثبات مرتب (إلك).

إذا علمت أن:

$$y = \sin^2 x - \frac{x}{2} + \cos^2 x$$

أثبت أن:

$$\frac{dx}{dy} = -2$$

3- إذا علمت أن:

$$y = \sin^2 2u \quad , \qquad u = \frac{-2}{x}$$

جد $\frac{dy}{dx}$ جهز $(\sin 2u)^2$

الحل

$$\frac{dy}{du} = 2(\sin 2u)\cos 2u \times 2$$
$$= 4\sin 2u \cos 2u$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$
$$= (4\sin 2u \cos 2u)(\frac{2}{x^2})$$

نعوض قيمة $u = \frac{-2}{x}$:

$$= (4\sin\frac{-4}{x}\cos\frac{-4}{x})(\frac{2}{x^2})$$

4- إذا كان: $f(x) = \sin^4 3x$ فإن $f`(x)$ هي:

a) $4\sin 3x \cos 3x$
b) $12\sin^3 3x \cos 3x$
c) $12\sin 3x \cos 3x$
d) $2\cos^3 3x$

5- إذا كان : $y = \frac{-2}{3\sin 4t}$ فإن $\frac{dy}{dt}$:

a) $\frac{24\cos 4t}{3\sin^2 4t}$

b) $\frac{-24\cos 4t}{9\sin^2 4t}$

c) $\frac{24\cos 4t}{9\sin^2 4t}$

d) $\frac{-24\cos 4t}{3\sin^2 4t}$

إذا لم تخطئ فإنك لم تحاول . وإذا لم تحاول فإنك ستبقى مكانك

0785351625

تدرب وأحل المسائل (أسئلة الكتاب ص86)

1) $f(x) = 2\cos x + \sin x$

2) $f(x) = 5 + cosx$

3) $f(x) = \sin x - \cos x$

4) $f(x) = x\sin x$

5) $f(x) = \sin x \cos x$

6) $f(x) = e^x \sin x$

7) $f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$

8) $f(x) = \sin(x^2 + 1)$

9) $f(x) = \ln(\sin x)$

10) $f(x) = \cos(5x - 2)$

11) $f(x) = \sin 3x + \cos 6x$

12) $f(x) = \cos(x^2 - 3x - 4)$

13) $f(x) = e^{2x} \sin 10x$

14) $f(x) = (\cos x^2)(\ln x)$

15) $f(x) = \sqrt{x+1}\sin\frac{\pi x}{2}$

16) $f(x) = 4\sin^2 x$

17) $f(x) = \cos^3 2x \cos x$

18) $f(x) = 5\sin\sqrt{x}$

19) $f(x) = (\cos 2x - \sin x)^2$

20) $f(x) = \sin\sqrt{x} + \sqrt{\sin 2x)}$

21) $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{\sin x}$

22) غزلان: يمثل الإقتران :

$$D(t) = 1500 + 400\sin 0.4t$$

عدد الغزلان في إحدى الغابات بعد t سنة من بدا الدراسة لأحد الباحثين عليها، أجد معدل تغير عدد الغزلان في الغابة بالنسبة إلى الزمن t.

---

23) نهار: يمكن إيجاد عدد ساعات النهار H في أي يوم t من العام في إحدى المدن باستعمال الاقترانك

$$H(t) = 12 + 2.4\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right)$$

أجد معدل تغير عدد ساعات النهار بالنسبة إلى الزمن t في هذه المدينة.

مهارات التفكير العليا

24) تبرير: إذا كان $y = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x)$ ، فأثبت أن $\frac{dy}{dx} = \sin^2 x$ ، مبرراً إجابتي.

---

25) تحد: أجد مشتقة الاقتران:

$$f(x) = e^x \sin^2 x \cos x$$

---

26) أكتشف الخطأ: أكتشف الخطأ في الحل الآتي، ثم أصححه:

$$f(x) = \sin(\frac{1}{x})$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\sin(\frac{1}{x})$$

شجع نفسك ...لأنه لا أحد سيقوم بذلك بدلاً منك

اختبار نهاية الوحدة

أختار الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) إذا كان: $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$، فإن $f'(-1)$ هي:

a)3 b)-3 c) 4 d)-4

2) إذا كان $y = uv$، وكان:

a) -4 b) -1 c)1 d)4

3) إذا كان: $f(x) = x - \frac{1}{x}$، فإن $f'(x)$ هي:

a) $1 + \frac{1}{x^2}$ b) $1 - \frac{1}{x^2}$

c) $1 + \frac{1}{x}$ d) $1 - \frac{1}{x}$

4) إذا كان: $y = \sin 4t$، فإن $\frac{dy}{dx}$ هي:

a) $\cos 4t$ b) $-\cos 4t$

c) $4\cos 4t$ d) $-4\cos 4t$

5) إذا كان: $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$، فإن $f'(x)$ هي:

a) $\frac{2}{(x-1)^2}$ b) $\frac{1}{(x-1)^2}$

c)$-\frac{2}{(x-1)^2}$ d) $-\frac{1}{(x-1)^2}$

6) إذا كان: $f(x) = x\cos x$، فإن $f'(x)$ هي:

a) $\cos x - x\sin x$ b) $\cos x + x\sin x$

c) $sinx - x\cos x$ d) $\sin x$

7) إذا كان: $f(x) = \sin^4 3x$، فإن $f'(x)$ هي:

a) $4\sin^3 3x\cos 3x$ b) $12\sin^3 3x\cos 3x$

c) $12\sin 3x\cos 3x$ d) $2\cos^3 3x$

إذا كان $f(x)$ و$g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x = 1$، وكان: $g'(2) = 2$، $f'(2) = -4$، $f(2) = 3$، فأجد كلا مما يأتي:

8) $(fg)'(2)$

9) $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$

10) $(3f - 4fg)'(2)$

أنهار: يمثل الاقتران: $h(t) = 0.12e^{0.1t}$ ارتفاع نهر (بالسنتيمتر) فوق مستواه الطبيعي، حيث t الزمن بالساعات بعد بداية هطل المطر:

11) أجد معدل تغير ارتفاع النهر بالنسبة إلى الزمن t.

12) أجد معدل تغير ارتفاع النهر بعد 3 ساعات من بدء هطل المطر.

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

13) $f(x) = \frac{x}{3x+1}, x = 1$

14) $f(x) = (x^2 + 2)(x + \sqrt{x}), x = 4$

15) $f(x) = e^{3x} + e^{-3x}, x = 1$

16) $f(x) = e^{0.5} - x^2, x = 20$

17) $f(x) = x^2(3x - 1)^3, x = 1$

18) $f(x) = (x + 3)^2 e^{3x}, x = 2$

19) $f(x) = 3\ln x + \frac{1}{x}, x = e$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

20) $f(x) = \sqrt{2x^4 + 7}$

21) $f(x) = \frac{1}{(x^2+16)^5}$

22) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 5x + 2}$

23) $f(x) = (8x^2 - 6)^{-40}$

24) $f(x) = \frac{1}{3+2x}$

25) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

26) $f(x) = (2x - 8)^2(3x^2 - 4)$

27) $f(x) = x^5(3x^2 + 4x - 7)$

28) $f(x) = x^3(2x + 6)$

29) $f(x) = (e^{-x} + e^x)^3$

30) $f(x) = 2x^3e^{-x}$

31) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$

32) $f(x) = 5\ln(5x - 4)$

33) $f(x) = \ln e^x$

34) $f(x) = \ln(3x^2 + 2x - 1)$

35) $f(x) = x^5 \sin 3$

36) $f(x) = \cos^2 x + \sin x$

37) $f(x) = \frac{\sqrt{\cos x}}{x}$

38) $f(x) = \sin(5x)\ln(\cos x)$

39) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^2+9}\right)$

40) $f(x) = e^{2x}\sin 2x$

بكتريا: يمثل الاقتران: $N(t) = 1000(1 - \frac{3}{t^2+50})$

عدد الخلايا البكتيرية بعد t يوما في مجتمع بكتيري:

41) أجد معدل تغير N بالنسبة إلى الزمن t.

42) أجد معدل تغير N بالنسبة إلى الزمن t عندما $t = 1$

غزلان: يمثل عدد الغزلان في غابة بالاقتران: $P(t) = \frac{2000}{4t+80}$ ، حيث t الزمن بالأشهر منذ الآن:

43) أجد معدل تغير عدد الغزلان في الغابة بالنسبة إلى الزمن t.

44) اجد معدل تغير عدد الغزلان في الغابة عندما t=10 ، مفسراً معنى النتائج.

سكان : يمثل عدد سكان بلدة صغيرة بالاقتران:

$$P(t) = \frac{700}{t^2 + 1}$$

حيث t الزمن بالسنوات، و P عدد السكان بالآلاف:

45) أجد معدل تغير عدد السكان في البلدة بالنسبة إلى الزمن t .

46) أجد معدل تغير عدد الشكان في البلدة عندما t=3 ، مفسرا معنى النتائج.