



الأساس في الرياضيات أدبي

الاقترنات الأسية

الأستاذ
فهد السلامة

0790 943 489

نحن جيل الأبطال

توجيهي
2006



الوحدة الأولى: الإقترانات الأسية

الفصل الدراسي الأول

الرياضيات الأدبي

- ❖ تحتوي الدوسية على :
- ❖ حل لجميع امثلة كتاب الطالب
- ❖ اسئلة كتاب التمارين
- ❖ اسئلة إضافية
- ❖ اختبر نفسك

جيل الأبطال 2006

أ.فهد السلامة 0790943489

انضم الى جروبات الواتس اب





الوحدة (1) الاقتارات الأسيّة جيل الأبطال

❖ جد ناتج ما يلي في أبسط صورة:

4) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 625$
 $(5)^{-x} = 5^4$
 $-x = 4 \rightarrow x = -4$

5) $4^{-x} = \frac{1}{256}$
 $4^{-x} = (256)^{-1}$
 $4^{-x} = (4^4)^{-1}$
 $4^{-x} = 4^{-4}$
 $-x = -4 \rightarrow x = 4$

6) $2 \times 4^x = 128$

7) $3^{x+1} = 27$

1) $(16)^{\frac{3}{4}}$
 $= \sqrt[4]{16^3}$
 $= (2)^3 = 8$

2) $(-125)^{2/3}$
 $= \sqrt[3]{-125^2}$
 $= (-5)^2 = 25$

3) $32^{4/5}$
 $= \sqrt[5]{32^4}$
 $= (2)^4 = 16$

❖ حل المعادلات الأسية الآتية:

1) $4^x = 16$
 $4^x = 4^2$
 $x = 2$

2) $2^x = 32$
 $2^x = 2^5$
 $x = 5$

3) $2^{2x-1} = 8$
 $2^{2x-1} = 2^3$
 $2x - 1 = 3 \Rightarrow 2x = 4$
 $x = 2$





التعويض المباشر

❖ جد قيمة كل اقتاران عند قيم x المعطاة:

1)

$$f(x) = 4^x, x = 3$$

$$f(3) = 4^3 = 64$$

2)

$$f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x, x = -2$$

$$f(-2) = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$$

$$= (5)^2 = 25$$

3)

$$f(x) = 3^x, x = 4$$

$$f(4) = 3^4$$

$$= 81$$

4)

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x, x = -1$$

$$f(-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

$$= (3)^1 = 3$$

5)

$$f(x) = (49)^x, x = 0.5$$

$$f(0.5) = (49)^{0.5}$$

$$= (49)^{1/2}$$

$$= \sqrt{49} = 7$$

6)

$$f(x) = \left(\frac{1}{144}\right)^x, x = -0.5$$

$$f(-0.5) = \left(\frac{1}{144}\right)^{-0.5}$$

$$= \left(\frac{1}{144}\right)^{-\frac{1}{2}} = (144)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{144} = 12$$

الإقتران الأسية



$$f(x) = ab^x, b > 0, b \neq 1$$

❖ أي الاقتارات الآتية هو اقتران أسّي:

a) $f(x) = 4(x)^3$ (ليس أسّي)

b) $f(x) = 2(3)^x$ (أسّي)

c) $f(x) = \frac{1}{7}(6)^{-x+4}$ (أسّي)

d) $f(x) = -5\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (أسّي)

e) $f(x) = 4(-2)^{x+1}$ (ليس أسّي)

f) $f(x) = -6(1)^{x-2}$ (ليس أسّي)

تذكر أن :



$$0.5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$0.2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$0.25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$0.75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

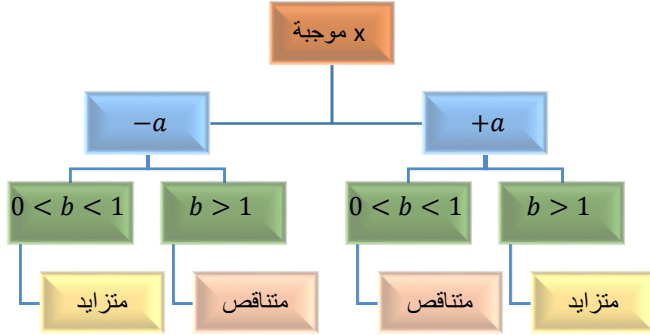




الوحدة (1) الاقترانات الأسية جيل الأبطال

❖ كيف أميز اذا كان الاقتران متزايد أم متناقص؟

$$f(x) = ab^x$$



أسئلة :

❖ اذا كان $f(x) = 2^x$ فجد مايلي :

(1) امثل الاقتران بيانياً ثم جد المجال و المدى وخطوط التقارب.

(2) جد المقطعين من المحورين الإحداثيين.

(3) هل الاقتران متزايداً متناقص .

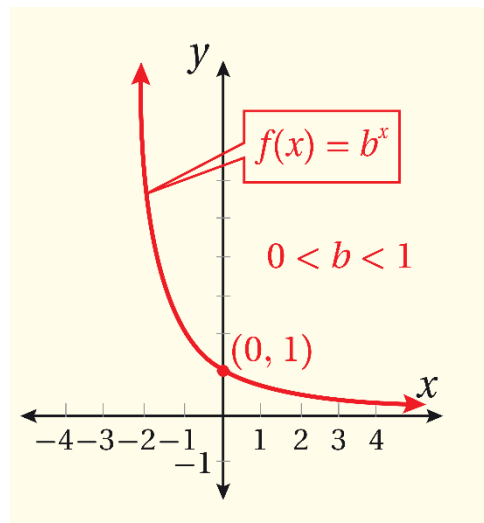
(4) هل الإقتران $f(x)$ واحد الواحد.

التمثيل البياني

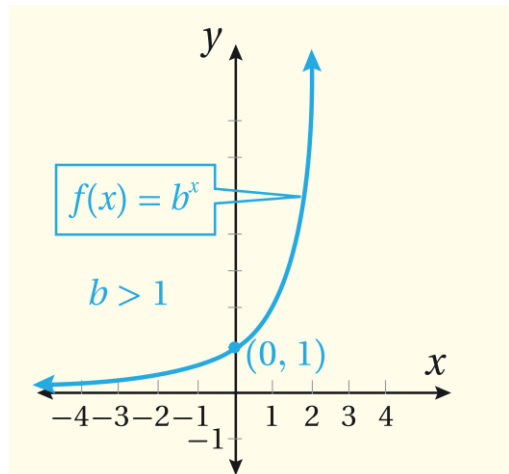


رسم الاقتران الأسّي:

(1) متناقص



(2) متزايد





الوحدة (1) الاقترانات الأسية جيل الأبطال

❖ اذا كان $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ فجد مايلي :

(1) امثل الاقتران بيانياً ثم جد المجال و المدى وخطوط التقارب.

(2) جد المقطعين من المحورين الإحداثيين.

(3) هل الاقتران متزايداً متناقص .

(4) هل الإقتران $f(x)$ واحد الواحد.

الحل:

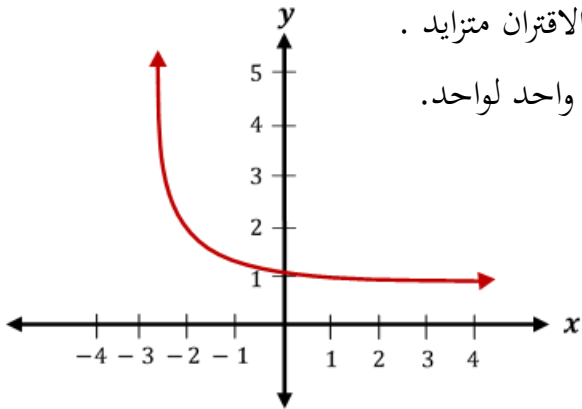
x	-2	-1	0	1	2
y	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

(1) المجال $R(-\infty, \infty)$ ، المدى $R^+(0, \infty)$.

(2) خط التقارب محور x $y = 0$ مقطع $y = 1$ ، المقطع x لا يوجد.

(3) الاقتران متزايد .

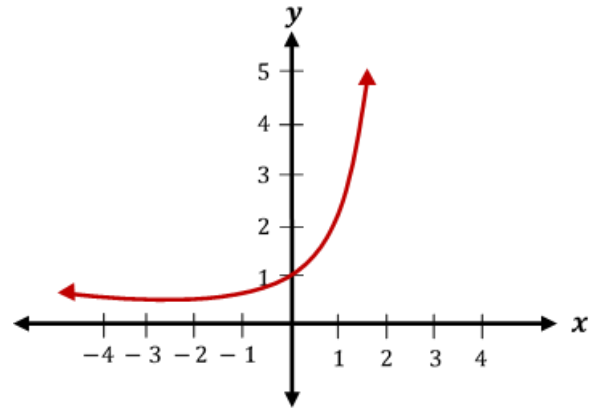
(4) واحد لواحد.



الحل:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

تعويض x بالاقتران



(1) المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية $R(-\infty, \infty)$.

المدى $R^+(0, \infty)$

(2) خط التقارب الأفقي هو محور x أو $y = 0$

المقطع y هو $y = 1$ عندما $x = 0$ ، المقطع x لا يوجد.

(3) الاقتران متزايد .

(4) الاقتران واحد لواحد باستعمال اختبار الخط

الأفقي.





الوحدة (1) الاقترانات الأسية جيل الأبطال

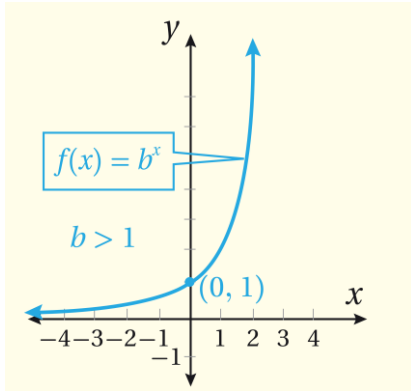
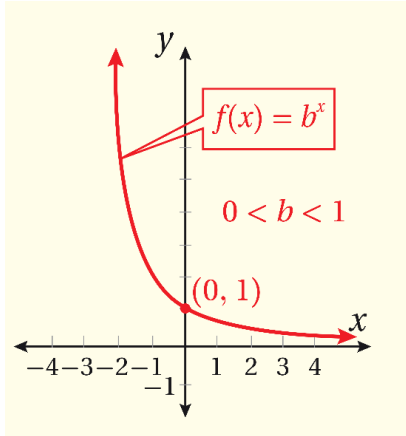
خصائص الاقتران الأسى



التمثيل البياني للاقتران الأسى على صورة

$f(x) = b^x$ حيث $b > 0, b \neq 1$ له خصائص

- (1) مجاله مجموعة الأعداد الحقيقية $R(-\infty, \infty)$.
- (2) مداه: $R^+(0, \infty)$
- (3) خط التقارب الأفقى هو محور x أو $y = 0$.
- (4) يقطع الاقتران الأسى محور y في نقطة واحدة هي $(0, 1)$ ولا يقطع محور x .
- (5) اقتران واحد لواحد.
- (6) رسمته.



إختبر نفسك

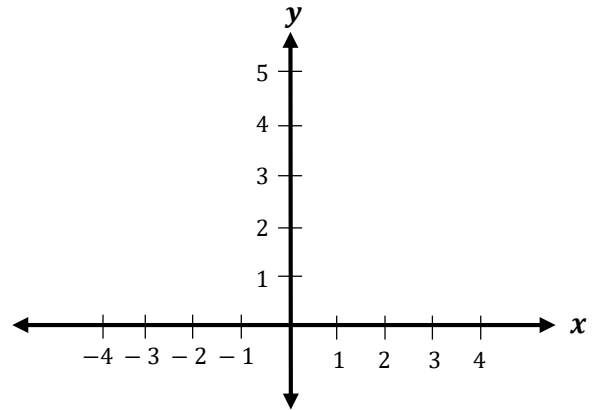


❖ إذا كان $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ فجد مايلي :

- (1) امثل الاقتران بيانياً ثم جد المجال و المدى.
- (2) جد المقطعين من المحورين الإحداثيين.
- (3) هل الاقتران متزايداً متناقص .
- (4) هل الإقتران $f(x)$ واحد الواحد.

الحل:

x					
y					





الوحدة (1) الاقترانات الأسية جيل الأبطال

2) $f(x) = 7(2)^{-x} + 3$

الحل:

$a = 7, b = \frac{1}{2}, h = 0, k = 3$

المجال R مجموعة الاعداد الحقيقية

المدى : $(2, \infty)$.

$f(x)$ متناقص

خط التقارب $y = 3$

3) $f(x) = -3(4)^x + 1$

الحل:

$a = -3, b = 4, h = 0, k = 1$

المجال R مجموعة الاعداد الحقيقية

المدى : $(-\infty, 1)$.

خط التقارب $y = 1$

$f(x)$ متناقص

4) $f(x) = 2(3)^{x+2} - 1$

الحل:

$a = 2, b = 3, h = -2, k = -1$

المجال R مجموعة الاعداد الحقيقية

المدى : $(-1, \infty)$.

خط التقارب $y = -1$

$f(x)$ متزايد

خصائص الاقتران الأسى في صورة:

$f(x) = ab^{x-n} + k$

1) مجاله الاقتران $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية R .

2) مدى الاقتران $f(x)$ هو الفترة (k, ∞) إذا كانت a

موجبة.

3) مدى الاقتران $f(x)$ هو الفترة $(-\infty, k)$ إذا كانت

a سالبة.

4) خط التقارب الأفقي هو الاقتران $y = k$



سؤال :

❖ جد خط التقارب الأفقي لكل اقتران ثم جد

مجاله ومداه مبيناً إذا كان متزايد ام متناقص:

1) $f(x) = 5(3)^{x+1} - 2$

الحل:

$a = 5, b = 3, h = -1, k = -2$

المجال R مجموعة الاعداد الحقيقية

المدى : $(-2, \infty)$.

$f(x)$ متزايد

خط التقارب $y = -2$





الوحدة (1) الاقترانات الأسية جيل الأبطال

(2) خط التقارب هو:

- a) $y = 14$ b) $y = -14$
c) $x = 14$ d) $x = -14$

(3) الاقتران $f(x)$ هو:

- a) متزايد b) متناقص
c) ثابت d) خطي

(4) مجال الاقتران $f(x)$ هو:

- a) R b) R^+ c) R^- d) $R/\{0\}$

(5) مدى الاقتران $f(x)$ هو:

- a) $(-2, \infty)$ b) $(-\infty, -2)$
c) $(-14, \infty)$ d) $(-\infty, -14)$

❖ يمثل الاقتران $f(x) = 30(2)^x$ عدد حشرات

الخنفساء الدقيق في كيس دقيق، حيث x عدد

الأسابيع منذ بداية رصد وجودها في الكيس:

(1) جد عدد الحشرات في هذا الكيس بعد 6

أسابيع:

الحل:

$$\begin{aligned} f(x) &= 30(2)^x \\ f(6) &= 30(2)^6 \\ &= 30(64) = 1920 \end{aligned}$$

(5) $f(x) = 4(5)^{-x}$

الحل:

$$f(x) = 4\left(\frac{1}{5}\right)^x$$

$$a = 4, b = \frac{1}{5}, h = 0, k = 0$$

المجال R مجموعة الاعداد الحقيقية

المدى : $R^+(0, \infty)$

خط التقارب $y = 0$ محور x

$f(x)$ متناقص

(6) $f(x) = -\frac{1}{4}(3)^{x-1} + 2$

الحل:

$$a = -\frac{1}{4}, b = 3, h = 1, k = 2$$

المجال R مجموعة الاعداد الحقيقية

المدى : $(-\infty, 2)$

خط التقارب $y = 2$

$f(x)$ متناقص

إختبر نفسك



❖ إذا كان $f(x) = -2(8)^{-x+6} - 14$

(1) قيمة h هي:

- a) -2 b) 6 c) -6 d) -14





الوحدة (1) الاقترانات الأسية جيل الأبطال

❖ يمثل الاقتران $f(x) = 2(0.75)^x$ كمية الماء

المتبقية بالخزان بعد x ساعة نتيجة ثقب فيه:

(1) جد عدد الخلايا البكتيرية بعد 5 ساعات:

الحل:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(0.75)^x \\ f(1) &= 2(0.75)^1 \\ &= 1.5 \end{aligned}$$

(2) ما الزمن الذي تصبح فيه كمية الماء المتبقية

بالخزان $\frac{9}{8}$ تقريباً:

الحل:

$$\begin{aligned} 2(0.75)^x &= \frac{9}{8} \\ (0.75)^x &= \frac{9}{8} \times \frac{1}{2} \\ (0.75)^x &= \frac{9}{16} \\ \left(\frac{3}{4}\right)^x &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

❖ يمثل الاقتران $f(x) = 400(2)^{\frac{x}{3}}$ عدد الخلايا

البكتيرية بعد x ساعة في تجربة مخبرية:

(1) جد عدد الخلايا البكتيرية عند بدء التجربة:

الحل:

$$\begin{aligned} f(x) &= 400(2)^{\frac{x}{3}} \\ f(0) &= 400(2)^{\frac{0}{3}} \\ &= 400. \end{aligned}$$

(2) بعد كم أسبوع يصبح عددها في الكيس

7680 حشرة:

الحل:

$$\begin{aligned} 30(2)^x &= 7680 \\ (2)^x &= 256 \\ (2)^x &= 2^8 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

❖ يمثل الاقتران $f(x) = 500(2)^x$ عدد الخلايا

البكتيرية في عينة مخبرية، حيث x الزمن بالساعات:

(1) جد عدد الخلايا البكتيرية بعد 5 ساعات:

الحل:

$$\begin{aligned} f(x) &= 500(2)^x \\ f(5) &= 500(2)^5 \\ &= 500(32) = 16000 \end{aligned}$$

(2) بعد كم أسبوع يصبح عدد الخلايا البكتيرية

في العينة 4000 خلية:

الحل:

$$\begin{aligned} 500(2)^x &= 4000 \\ (2)^x &= 8 \\ (2)^x &= 2^3 \\ x &= 3 \end{aligned}$$





أُتدرب وأحل المسائل

❖ أجد قيمة كل اقتاران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

$$1) f(x) = (11)^x, x = 3$$

$$f(3) = (11)^3 = 1331$$

$$f(x) = -(5)^x + 4, x = 4$$

$$2) f(4) = -(5)^4 + 4$$

$$= -625 + 4 = -621$$

$$f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^x, x = 2$$

$$3) f(2) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^2$$

$$= 3\left(\frac{1}{49}\right) = \frac{3}{49}$$

$$f(x) = -5(2)^x, x = 1$$

$$4) f(1) = -5(2)^1$$

$$= -10$$

$$f(x) = 3^x + 1, x = 5$$

$$5) f(5) = 3^5 + 1$$

$$= 243 + 1 = 244.$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x - 3, x = 2$$

$$6) f(2) = \left(\frac{1}{9}\right)^2 - 3$$

$$= \frac{1}{81} - 3 = \frac{1}{81} - \frac{243}{81} = -\frac{242}{81}$$

2) جد عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة:

الحل:

$$f(12) = 400(2)^{12/3}$$

$$= 400(2)^4$$

$$= 400(16) = 6400$$

3) بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا البكتيرية 102400 خلية:

الحل:

$$400(2)^{\frac{x}{3}} = 102400$$

$$(2)^{\frac{x}{3}} = 256$$

$$(2)^{\frac{x}{3}} = (2)^8$$

$$\frac{x}{3} = 8 \Rightarrow x = 24$$

قاوم حتى لو...

وصلت ممزقاً...

فلذة الوصول...

سترتم تعبك...



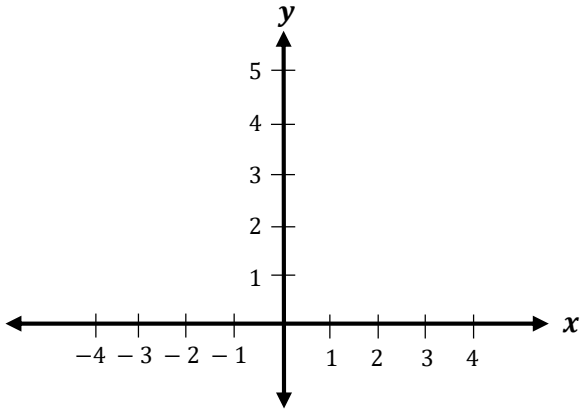


الوحدة (1) الاقترانات الأسية جيل الأبطال

❖ أمثل كل اقتران مما يأتي بيانياً، ثم أجد مجاله ومداه:

7) $f(x) = 4^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16



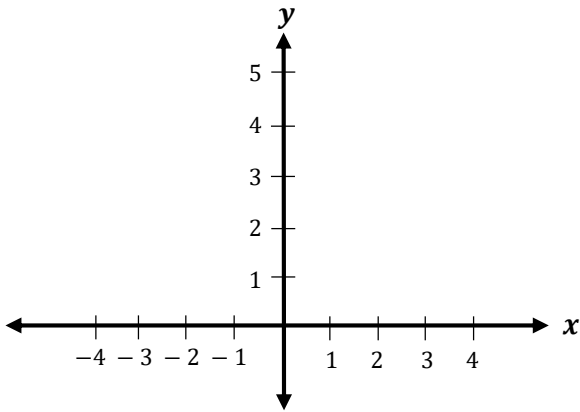
المجال R المدى : R^+

$f(x)$ متناقص

خط التقارب محور x ($y = 0$)

9) $f(x) = 7\left(\frac{1}{7}\right)^x$

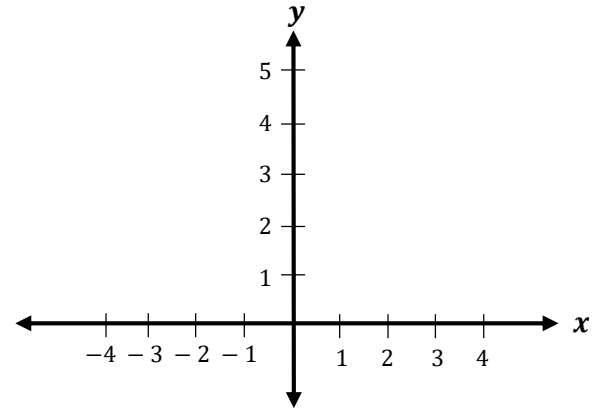
x	-2	-1	0	1	2
y	343	49	7	1	$\frac{1}{7}$



المجال R المدى : R^+

$f(x)$ متناقص

خط التقارب محور x ($y = 0$)



المجال R المدى : R^+

$f(x)$ متزايد

خط التقارب محور x ($y = 0$)

8) $f(x) = (9)^{-x}$

$f(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	81	9	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{81}$





❖ يمثل الاقتران $f(x) = 7000(1.2)^x$ عدد الخلايا

البكتيرية في عينة مخبرية، حيث x الزمن بالساعات:

(15) جد عدد الخلايا البكتيرية في بداية التجربة:

الحل:

$$f(x) = 7000(1.2)^x$$

$$f(0) = 7000(1.2)^0 = 7000$$

(16) جد عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة:

الحل:

$$f(12) = 7000(2)^{12}$$

$$= 62412$$

(17) بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا البكتيرية

10080 خلية:

الحل:

$$\Rightarrow 7000(1.2)^x = 10080$$

$$(1.2)^x = 1.44$$

$$(1.2)^x = (1.2)^2$$

$$x = 2$$

❖ يمثل الاقتران $f(x) = 100(0.97)^x$ النسبة المئوية

للضوء المار خلال x من الألواح الزجاجية:

(18) جد النسبة المئوية للضوء المار خلال لوح

زجاجي واحد:

الحل:

$$f(x) = 100(0.97)^x$$

$$f(1) = 100(0.97)^1 = 97$$

❖ أجد خط التقارب الأفقي لكل اقتران مما يأتي، ثم

أحدد مجاله ومداه، مبيناً إذا كان متناقصاً أم

متزايداً:

(11) $f(x) = 5^{x-1} + 2$

المجال R المدى : $(2, \infty)$.

$f(x)$ متزايد

خط التقارب الأفقي $(y = 2)$

(12) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 5$

المجال R المدى : $(-5, \infty)$.

$f(x)$ متناقص

خط التقارب الأفقي $(y = -5)$

(13) $f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^{x+5} - 6$

المجال R المدى : $(-6, \infty)$.

$f(x)$ متناقص

خط التقارب الأفقي $(y = -6)$

(14) $f(x) = 3(7)^{x-2} + 1$

المجال R المدى : $(1, \infty)$.

$f(x)$ متزايد

خط التقارب الأفقي $(y = 1)$





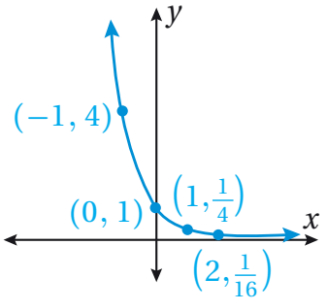
الوحدة (1) الاقترانات الأسية جيل الأبطال

مهارات التفكير العليا



(22) يبين الشكل المجاور التمثيل البياني لمنحنى

الاقتران $f(x) = ab^x$ جد $f(3)$:



(23) أي الاقترانات الآتية مختلف:

$$y = 3^x$$

$$f(x) = 2(4)^x$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$y = 5(3)^x$$

(24) إذا كان الاقتران $f(x) = ab^x$ أسياً، فأثبت

$$\text{أن } \frac{f(x+1)}{f(x)} = b$$

(19) جد النسبة المئوية للضوء المار خلال 3 ألواح

زجاجية:

الحل:

$$f(3) = 100(0.97)^3 = 91.2$$

❖ يمثل الاقتران $P(t) = 100(0.3)^t$ النسبة المئوية

للمتعافين من مرضى سرطان البنكرياس x ممن هم

في المرحلة المتقدمة، حيث تعافوا بعد سنة من

التشخيص الأولي للمريض:

(20) جد النسبة المئوية للمتقاعدين بعد سنة من

التشخيص الأولي:

الحل:

$$P(t) = 100(0.3)^t$$

$$P(1) = 100(0.3)^1 = 30$$

(21) بعد كم سنة تصبح النسبة المئوية للمتعافين

9%:

الحل:

$$100(0.3)^t = 9$$

$$(0.3)^t = \frac{9}{100}$$

$$\left(\frac{3}{10}\right)^t = \left(\frac{3}{10}\right)^2$$

$$t = 2$$





إختبر نفسك



❖ أجد قيمة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

1) $f(x) = (13)^x, x = 2$

2) $f(x) = 4(5)^x, x = 3$

3) $f(x) = 7\left(\frac{1}{2}\right)^x, x = 3$

4) $f(x) = -(3)^x + 7, x = 4$

5) $f(x) = -(2)^x + 1, x = 6$

6) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 12, x = 3$

❖ أمثل كل اقتران مما يأتي بيانياً، ثم أحدد مجاله ومداه:

7) $f(x) = 7(6)^x$

8) $f(x) = 7^{-x}$

9) $f(x) = 5\left(\frac{1}{8}\right)^x$

10) $f(x) = 2(9)^x$

❖ أجد خط التقارب الأفقي لكل اقتران مما يأتي،

ثم أحدد مجاله ومداه، مبيّناً إذا كان متناقصاً أم

متزايداً:

11) $f(x) = 7^{x-2} + 1$

12) $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^{x+1} - 3$

13) $f(x) = 5\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3} - 7$

14) $f(x) = 7(4)^{x-5} + 3$





الوحدة (1) النمو والإضمحلال الأسّي جيل الأبطال

(2) أجد عدد الخراف بعد 5 سنوات من بدء الدراسة

الحل:

$$\begin{aligned} A(t) &= 1524(1.31)^t \\ A(5) &= 1524(1.31)^5 \\ &= 1524(3.85) \\ &= 5867.4 \approx 5867 \end{aligned}$$

❖ في دراسة شملت إحدى مزارع الأبقار، تبين أن عدد الأبقار في المزرعة يزداد بنسبة 18% سنوياً:

(1) أكتب اقتران النمو الأسّي الذي يمثل عدد الأبقار بعد t سنة، علماً بأن عددها في المزرعة عند بدء الدراسة هو 327 بقرة.

الحل:

$$\begin{aligned} A(t) &= a(1 + r)^t \\ A(3) &= 327(1 + 0.18)^t \\ &= 327(1.18)^t \end{aligned}$$

(2) أجد عدد الأبقار بعد 3 سنوات من بدء الدراسة

الحل:

$$\begin{aligned} A(t) &= a(1 + r)^t \\ A(3) &= 327(1.18)^3 \\ A(t) &= 327(1.64) \\ &= 537.2 \approx 537 \end{aligned}$$

اقتران النمو الأسّي



$$A(t) = a(1 + r)^t$$

الكمية الابتدائية: a

النسبة المئوية: r

عامل النمو: $1 + r$

الزمن: t

أسئلة : ? ? ? ? ?

❖ في دراسة شملت إحدى مزارع الأغنام، تبين أن عدد الخراف في المزرعة يزداد بنسبة 31% سنوياً:

(1) أكتب اقتران النمو الأسّي الذي يمثل عدد الخراف بعد t سنة، علماً بأن عددها في المزرعة عند بدء الدراسة هو 1524 خروفاً.

الحل:

$$\begin{aligned} A(t) &= a(1 + r)^t \\ A(t) &= 1524(1 + 0.31)^t \\ A(t) &= 1524(1.31)^t \end{aligned}$$





الوحدة (1) النمو والاضمحلال الأسّي جيل الأبطال

(2) جد عدد مستخدمي الموقع بعد سنة 2025 .

الحل:

$$t = 6$$

$$A(t) = 50000(1.15)^6$$

$$\approx 115653$$

اقتران الاضمحلال الأسّي



$$A(t) = a(1 - r)^t$$

الكمية الابتدائية: a

النسبة المئوية: r

عامل الاضمحلال: $1 - r$

الزمن: t

❖ تتناقص 5g من عنصر الكروم بما نسبته 2.45%

يوميًا، نتيجة تفاعله مع الهواء.

(1) أكتب اقتران الاضمحلال الأسّي الذي يمثل

كمية الكروم (بالغرام) بعد t يوماً.

الحل:

$$A(t) = a(1 - r)^t$$

$$= 5(1 - 0.0245)^t$$

$$= 5(0.9755)^t$$

❖ يبلغ عدد المشاركين في مؤتمر طبي 150 طبيًا هذه

السنة، ويتوقع زيادة هذا العدد بنسبة 8% كل

سنة:

(1) أكتب اقتران النمو الأسّي الذي يمثل عدد

المشاركين بعد t سنة.

الحل:

$$A(t) = a(1 + r)^t$$

$$= 150(1 + 0.08)^t$$

$$= 150(1.08)^t$$

(2) أجد عدد المشاركين المتوقع بعد 5 سنوات.

الحل:

$$A(5) = 150(1.08)^5$$

$$\approx 220$$

❖ استخدم 50 ألف شخص موقعًا إلكترونيًا تعليميًا

سنة 2019م، ثم ازداد عدد مستخدمي الموقع

بنسبة 15% كل سنة:

(1) أكتب اقتران النمو الأسّي الذي يمثل عدد

مستخدمي الموقع بعد t سنة.

الحل:

$$A(t) = a(1 + r)^t$$

$$= 50000(1 + 0.15)^t$$

$$= 50000(1.15)^t$$





الوحدة (1) النمو والإضمحلال الأسّي جيل الأبطال

إختبر نفسك



❖ يتناقص ثمن سيارة سعرها JD17350 بنسبة 3.5% سنوياً، فجد:

(1) أكتب اقتران الاضمحلال الأسّي لثمن السيارة بعد t سنة.

(2) جد ثمن السيارة بعد 3 سنوات.

❖ يتناقص عدد الخلايا البكتيرية في عينة مخبرية بنسبة 27% كل ساعة بعد إضافة مضاد حيوي:

(1) أكتب اقتران الاضمحلال الأسّي الذي يمثل عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة علماً أن عددها عند إضافة المضاد الحيوي هو 15275 خلية.

الحل:

$$\begin{aligned} A(t) &= a(1 - r)^t \\ &= 15275(1 - 0.27)^t \\ &= 15275(1 - 0.73)^t \end{aligned}$$

(2) جد عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 7 ساعات.

الحل:

$$A(7) = 15275(1 - 0.73)^7 \approx 1687$$

(2) أجد كمية الكروم (بالغرام) بعد 3 أيام.

الحل:

$$t = 3$$

$$\begin{aligned} A(3) &= 5(0.9755)^3 \\ &\approx 4.6 \end{aligned}$$

❖ اشترت سوسن سيارة هجينة قابلة للشحن بمبلغ JD28500 ، إذا كان ثمن السيارة يقل بنسبة 5% سنوياً، فجد:

(1) أكتب اقتران الاضمحلال الأسّي لثمن السيارة بعد t سنة.

الحل:

$$\begin{aligned} A(t) &= a(1 - r)^t \\ &= 28500(1 - 0.05)^t \\ &= 28500(0.95)^t \end{aligned}$$

(2) جد ثمن السيارة بعد 4 سنوات.

الحل:

$$\begin{aligned} t &= 4 \\ A(4) &= 28500(0.95)^4 \\ &= 23213 \end{aligned}$$





الوحدة (1) النمو والإضمحلال الأسي جيل الأبطال

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n.t}$$

$$A = 9000 \left(1 + \frac{0.0146}{4}\right)^{4(3)}$$

$$= 9000(1.00365)^{12} = 9402.2$$

❖ استثمرت تهاني مبلغ JD 5000 في شركة، بنسبة ربح مركب تبلغ 2.25% وتضاف كل 6 أشهر. أجد جملة المبلغ بعد 5 سنوات:

الحل:

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n.t}$$

$$A = 5000 \left(1 + \frac{0.0225}{2}\right)^{2(5)}$$

$$= 5000(1.01125)^{10}$$

$$= 5591.8$$

❖ استثمر ربيع مبلغ JD 1200 في شركة، بنسبة ربح مركب تبلغ 10% وتضاف كل شهر:

(1) أكتب صيغة تمثل جملة المبلغ بعد t سنة

الحل:

$$n = \frac{12}{1} = 12$$

❖ ينفق الدجاج في مزرعة للدواجن بنسبة 25% يومياً نتيجة إصابته بمرض ما. جد العدد المتبقي منه بعد 5 أيام من بدء المرض علماً أن عددها الأولي في المزرعة هو 1550 دجاجة.

الحل:

$$A(t) = a(1 - r)^t$$

$$A(5) = 1550(1 - 0.25)^5$$

$$= 1550(1 - 0.75)^5 \approx 368$$

الربح المركب



$$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

جملة المبلغ: A

المبلغ الأصلي: P

النسبة المئوية: r

عدد مرات إضافة الربح في السنة: n

❖ استثمر سليمان مبلغ JD 9000 في شركة صناعية، بنسبة ربح مركب تبلغ 1.46% وتضاف كل 3 أشهر. أجد جملة المبلغ بعد 3 سنوات:

الحل:

$$n = \frac{12}{3} = 4$$





الوحدة (1) النمو والإضمحلال الأسي جيل الأبطال

الربح المركب المستمر



$$A = P \cdot e^{rt}$$

A : جملة المبلغ:

P : المبلغ الأصلي:

❖ أودع علي مبلغ 4500 JD في حساب بنكي،
بنسبة ربح مركب تبلغ 4% أجد جملة المبلغ بعد
10 سنوات.

$$\begin{aligned} A &= P \cdot e^{rt} \\ &= 4500e^{0.04(10)} \\ &= 4500 \cdot e^{0.4} \\ &\approx 6713.21 \end{aligned}$$

❖ أودعت سارة مبلغ 6200 JD في حساب
بنكي، بنسبة ربح مركب تبلغ 3.2% أجد جملة
المبلغ بعد 9 سنوات.

$$\begin{aligned} A &= P \cdot e^{rt} \\ &= 6300e^{0.032(9)} \\ &= 6300 \cdot e^{0.288} \\ &\approx 8403 \end{aligned}$$

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$$

$$\begin{aligned} A &= 1200 \left(1 + \frac{0.1}{12}\right)^{12(t)} \\ &= 1200(1.0083)^{12t} \end{aligned}$$

(2) أجد جملة المبلغ بعد 5 سنوات.

$$\begin{aligned} A(5) &= 1200(1.0083)^{12(5)} \\ &= 1970.4 \end{aligned}$$

❖ استثمرت هند مبلغ 6200 JD في شركة، بنسبة
ربح مركب تبلغ 8.4% وتضاف كل يوم:

(1) أكتب صيغة تمثل جملة المبلغ بعد t سنة

الحل:

$$n = 365$$

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$$

$$\begin{aligned} A &= 6200 \left(1 + \frac{0.084}{365}\right)^{365t} \\ &= 6200(1 + 1.00023)^{365t} \end{aligned}$$

(2) أجد جملة المبلغ بعد 6 سنوات

$$\begin{aligned} A(6) &= 6200(1 + 1.00023)^{365(6)} \\ &= 949338 \end{aligned}$$





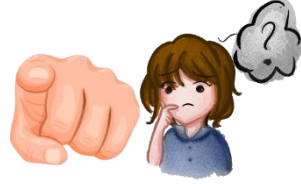
الوحدة (1) النمو والإضمحلال الأسي جيل الأبطال

مهارات التفكير العليا



- (4) اكتب اقتران يمثل عدد المصابين بالإنفلونزا الموسمية بعد اسبوع علماً ان العدد يتضاعف بمقدار 3 مرات كل أسبوع:

إختبر نفسك



- (5) قاعدة الإقتران الذي يمثل عدد المصابين بمرض بعد (t) أسبوع علماً ان العدد يتضاعف 4 مرات كل اسبوع هو:

- a) $A(t) = N(4)^t$ b) $A(t) = N(4)^{-t}$
c) $A(t) = (4)^t$ d) $A(t) = (4)N^t$

الأحلام بدون...

أهداف تبقى...

فقط أحلام...

أدرب وأحل المسائل



- (1) أودع حسام مبلغ 9000 JD في حساب بنكي، بنسبة ربح مركب مستمر تبلغ 3.6% أجد جملة المبلغ بعد 7 سنوات:

$$\begin{aligned} A &= P \cdot e^{rt} \\ &= 9000e^{0.036(7)} \\ &= 9000 \cdot e^{0.252} \\ &\approx 11579 \end{aligned}$$

- (2) أودعت ليلى مبلغ 8200 JD في حساب بنكي، بنسبة ربح مركب مستمر تبلغ 4.9% أجد جملة المبلغ بعد 9 سنوات:

$$\begin{aligned} A &= P \cdot e^{rt} \\ &= 8200e^{0.049(9)} \\ &= 8200 \cdot e^{0.441} \\ &\approx 12745 \end{aligned}$$

- (3) أعد باحث دراسة عن تكاثر ذباب الفاكهة، وتوصل إلى أنه يمكن تمثيل العدد التقريبي للذباب بالاقتران: $P(t) = 20 \cdot e^{0.3t}$ حيث P عدد الذباب بعد t ساعة. أجد عدد ذباب الفاكهة بعد 72 ساعة من بدء الدراسة، مقرباً إجابتي إلى أقرب عدد صحيح

$$\begin{aligned} P(72) &= 20 \cdot e^{0.3(72)} \\ &\approx 173 \end{aligned}$$





الوحدة (1) النمو والإضمحلال الأسّي جيل الأبطال

إختبر نفسك



❖ استخدم 35 ألف شخص موقعًا إلكترونيًا تعليميًا هذه السنة، ومن المتوقع أن يزداد هذا العدد بنسبة 2% كل سنة:

(1) أكتب اقتران النمو الأسّي الذي يمثل عدد مستخدمي الموقع بعد t سنة.

(2) أجد عدد مستخدمي الموقع بعد 7 سنوات.

❖ في دراسة علمية تناولت درجة تأثير التلوث في عدد الأسماك التي تعيش في إحدى البحيرات، توصل الباحثون إلى أن عدد الأسماك في البحيرة يقل بنسبة 20% كل سنة:

(3) أكتب اقتران الإضمحلال الأسّي الذي يمثل عدد الأسماك في البحيرة بعد t سنة، علمًا بأن عددها عند بدء الدراسة هو 1200 سمكة .

(4) أجد عدد الأسماك في البحيرة بعد 3 سنوات.

❖ بلغ عدد سكان لواء الموقر (شرق العاصمة عمان) 84370 نسمة تقريباً سنة 2015م. إذا كانت نسبة النمو السكاني في اللواء سنوياً 2.4%، فأجب عن السؤالين الآتيين:

(5) أكتب اقتران النمو الأسّي الذي يمثل عدد سكان اللواء بعد t سنة.

(6) أجد العدد التقريبي لسكان اللواء سنة 2030م.

❖ يتناقص ثمن سيارة سعرها JD 19725 بنسبة 3% سنوياً:

(7) أكتب اقتران الإضمحلال الأسّي لثمن السيارة بعد t سنة.

(8) أجد ثمن السيارة بعد 4 سنوات.

❖ استثمر عامر مبلغ JD 8000 في شركة صناعية، بنسبة ربح مركب تبلغ 5.5% وتضاف كل شهر:

(9) أكتب صيغة تمثل جملة المبلغ بعد t سنة.

(10) أجد جملة المبلغ بعد 3 سنوات.

(11) أودعت ليلي مبلغ JD 60000 في حساب بنكي، بنسبة ربح مركب مستمر مقدارها 6% أجد جملة المبلغ بعد 17 سنة.

❖ بلغ عدد سكان المملكة الأردنية الهاشمية نحو 10.8 ملايين نسمة تقريباً عام 2020م. إذا كانت نسبة النمو السكاني قرابة 2.6% سنوياً، فأجد العدد التقريبي للسكان عام 2030م





$$2) \log_{23} 23 = 1 \\ \Rightarrow 23^1 = 23$$

$$3) \log_{10} \left(\frac{1}{100} \right) = -2 \\ \Rightarrow 10^{-2} = \frac{1}{100}$$

$$4) \log_7 1 = 0 \\ \Rightarrow 7^0 = 1$$

$$5) \log_2 16 = 4 \\ \Rightarrow 2^4 = 16$$

$$6) \log_7 7 = 1 \\ \Rightarrow 7^1 = 7$$

$$7) \log_3 \frac{1}{243} = -5 \\ \Rightarrow 3^{-5} = \frac{1}{243}$$

$$8) \log_9 1 = 0 \\ \Rightarrow 9^0 = 1$$

إختبر نفسك



❖ اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي في صورة اسية:

$$1) \log_3 229 = 6$$

$$2) \log_5 625 = 4$$

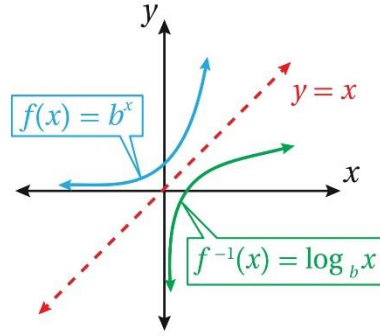
$$3) \log_{64} 4 = \frac{1}{3}$$

$$4) \log_{64} 8 = 0.5$$

$$5) \log_7 1 = 0$$

$$6) \log_{43} 43 = 1$$

$$\diamond f(x) = b^x \Rightarrow f(x) = \log_b x$$



معلومة

التمثيل البياني للاقتان $f(x) = b^x$ هو انعكاس للاقتان $f(x) = \log_b x$ حول المستقيم $y = x$.

❖ اذا كان $x > 0, b > 0, b \neq 1$ فإن:

الصورة الأسية: $b^y = x$

الصورة اللوغاريتمية: $\log_b x = y$

أسئلة : ? ? ? ? ?

❖ اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي في صورة اسية:

$$1) \log_2 8 = 3 \\ \Rightarrow 2^3 = 8$$





إختبر نفسك



❖ اكتب كل معادلة اسية مما يأتي في صورة لوغاريتمية:

- 1) $4^5 = 1024$
- 2) $5^{-2} = 0.04$
- 3) $3^{-4} = \frac{1}{81}$
- 4) $(32)^1 = 32$
- 5) $7^3 = 343$
- 6) $8^0 = 1$

إيجاد قيمة العبارة اللوغاريتمية



❖ جد قيمة كل مما يأتي دون استخدام الآلة الحاسبة:

1) $\log_2 64$

نفرض الجواب y

$$\begin{aligned}\log_2 64 &= y \\ 2^y &= 64 \Rightarrow 2^y = 2^6 \\ y &= 6\end{aligned}$$

2) $\log_{13} \sqrt{13}$

نفرض الجواب y

$$\begin{aligned}\Rightarrow \log_{13} \sqrt{13} &= y \\ 13^y &= \sqrt{13} \Rightarrow 13^y = 13^{1/2} \\ y &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

❖ اكتب كل معادلة اسية مما يأتي في صورة لوغاريتمية:

1) $8^3 = 512$
 $\Rightarrow \log_8 512 = 3$

2) $25^{\frac{1}{2}} = 5$
 $\Rightarrow \log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

3) $(5)^{-3} = \frac{1}{125}$
 $\Rightarrow \log_5 \frac{1}{125} = -3$

4) $27^0 = 1$
 $\Rightarrow \log_{27} 1 = 0$

5) $7^3 = 343$
 $\Rightarrow \log_7 343 = 3$

6) $49^{\frac{1}{2}} = 7$
 $\Rightarrow \log_{49} 7 = \frac{1}{2}$

7) $(2)^{-5} = \frac{1}{32}$
 $\Rightarrow \log_2 \frac{1}{32} = -5$

8) $17^0 = 1$
 $\Rightarrow \log_{17} 1 = 0$





7) $\log_{81} 9$

نفرض الجواب y

$$\Rightarrow \log_{81} 9 = y$$

$$81^y = 9 \Rightarrow (9^2)^y = 9$$

$$9^{2y} = 9 \Rightarrow 2y = 1$$

$$y = 1/2.$$

8) $\log_3 \frac{1}{27}$

نفرض الجواب y

$$\Rightarrow \log_3 \frac{1}{27} = y$$

$$3^y = \frac{1}{27} \Rightarrow 3^y = \frac{1}{(3)^3}$$

$$3^y = (3)^{-3} \Rightarrow y = -3$$

خصائص اللوغاريتميات



❖ $\log_b 1 = 0$

❖ $\log_b b = 1$

❖ $\log_b b^x = x$

❖ $b^{\log_b x} = x$

3) $\log_{36} 6$

نفرض الجواب y

$$\Rightarrow \log_{36} 6 = y$$

$$36^y = 6 \Rightarrow (6^2)^y = 6$$

$$6^{2y} = 6 \Rightarrow 2y = 1$$

$$\therefore y = 1/2$$

4) $\log_{10} 0.1$

نفرض الجواب y

$$\Rightarrow \log_{10} 0.1 = y$$

$$10^y = 0.1 \Rightarrow 10^y = \frac{1}{10}$$

$$10^y = 10^{-1} \Rightarrow y = -1$$

5) $\log_5 25$

نفرض الجواب y

$$\Rightarrow \log_5 25 = y$$

$$5^y = 25 \Rightarrow 5^y = 5^2$$

$$y = 2$$

6) $\log_8 \sqrt{8}$

نفرض الجواب y

$$\Rightarrow \log_8 \sqrt{8} = y$$

$$8^y = \sqrt{8} \Rightarrow 8^y = 8^{1/2}$$

$$y = \frac{1}{2}$$





7) $\log_9 9$

الحل:

$$\log_9 9 = 1 \quad (\text{من الخصائص})$$

8) $8^{\log_8 13}$

الحل:

$$8^{\log_8 13} = 13 \quad (\text{من الخصائص})$$

إختبر نفسك



❖ جد قيمة كل مما يأتي دون استعمال الآلة الحاسبة:

1) $\log_2 64$

الجواب = 6

2) $\log_{81} 9$

الجواب = $\frac{1}{2}$

3) $\log_{10} 0.0001$

الجواب = $\frac{1}{2}$

4) $\log_2 32$

الجواب = 5

5) $\log_{\frac{5}{3}} 1$

الجواب = 0

❖ جد قيمة كل مما يأتي دون استعمال الآلة الحاسبة:

1) $\log_3 1$

الحل:

$$\log_3 1 = 0 \quad (\text{من الخصائص})$$

2) $\log_{17} \sqrt{17}$

الحل:

$$\log_{17} 17^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \quad (\text{من الخصائص})$$

3) $\log_5 5 = 1$

الحل:

$$\log_5 5 = 1 \quad (\text{من الخصائص})$$

4) $7^{\log_7 5}$

الحل:

$$7^{\log_7 5} = 5 \quad (\text{من الخصائص})$$

5) $\log_2 1$

الحل:

$$\log_2 1 = 0 \quad (\text{من الخصائص})$$

6) $\log_{32} \sqrt{32}$

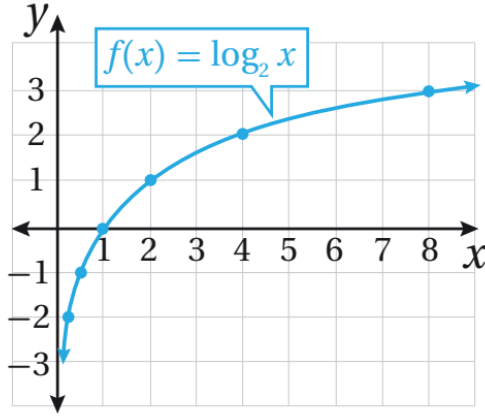
الحل:

$$\log_{32} 32^{1/2} = \frac{1}{2} \quad (\text{من الخصائص})$$





y	-2	-1	0	1	2
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



• المجال $R^+: (0, \infty)$

• المدى $R: (-\infty, \infty)$

• مقطع x هو 1، ولا يوجد مقطع ل y لان $(x > 0)$ دائماً.

• الاقتران له خط تقارب رأسي هو محور y ($x = 0$)
❖ الاقتران متزايد.

2) $f(x) = \log_3 x$

$x = 3^y$

y	-2	-1	0	1	2
x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

الحل:

6) $\log_{25} 125$

الجواب $\frac{3}{2}$

7) $\log_{\frac{1}{6}} 6$

الجواب -1

8) $10^{\log_{10} \frac{1}{9}}$

الجواب $\frac{1}{9}$

9) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3^6}}$

الجواب -3

10) $\log_b \sqrt[7]{b}$

الجواب $\frac{1}{7}$

11) $\log_{10}(1 \times 10^{-5})$

الجواب -5

تمثيل الاقتران اللوغاريتمي بيانياً



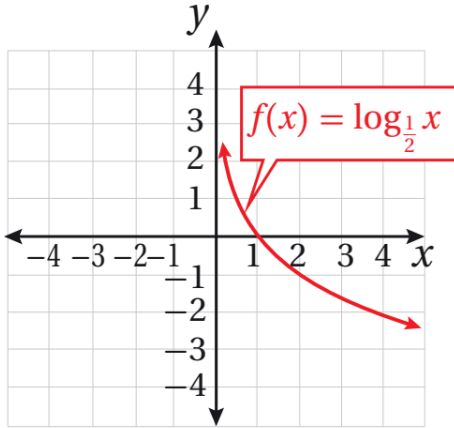
❖ أمثل كل اقتران مما يأتي بيانياً ثم حدد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الاحداثيين وخطوط تقاربه مبيناً اذا كان متناقص ام متزايد:

1) $f(x) = \log_2 x$

الحل:

$x = 2^y$





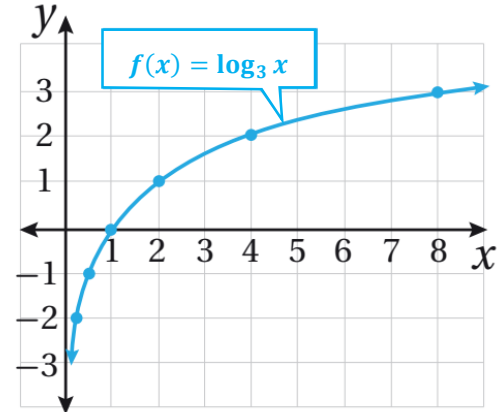
• المجال $R^+: (0, \infty)$

• المدى $R: (-\infty, \infty)$

• مقطع x هو 1، ولا يوجد مقطع ل y لان $(x > 0)$ دائماً.

• الاقتان له خط تقارب رأسي هو محور $(x = 0) y$

• الاقتان متناقص.



• المجال $R^+: (0, \infty)$

• المدى $R: (-\infty, \infty)$

• مقطع x هو 1، ولا يوجد مقطع ل y لان $(x > 0)$ دائماً.

• الاقتان له خط تقارب رأسي هو محور $(x = 0) y$

• الاقتان متزايد.

3) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

الحل:

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$$

y	-2	-1	0	1	2
x	4	2	1	1/2	1/4

4) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

الحل:

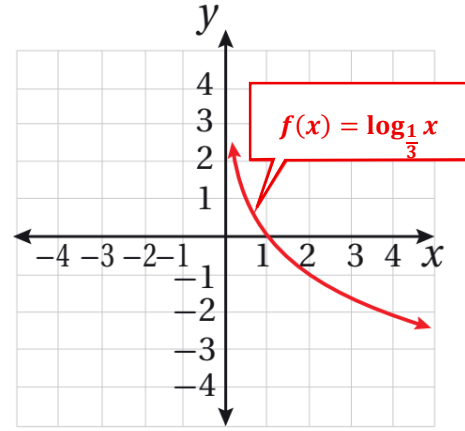
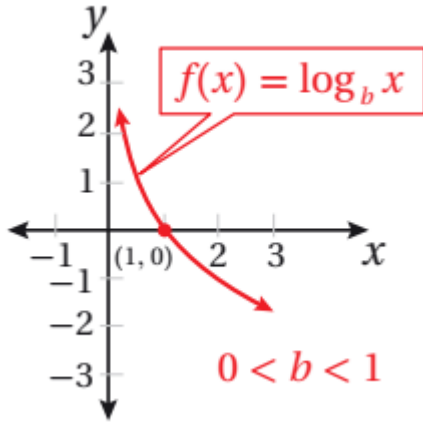
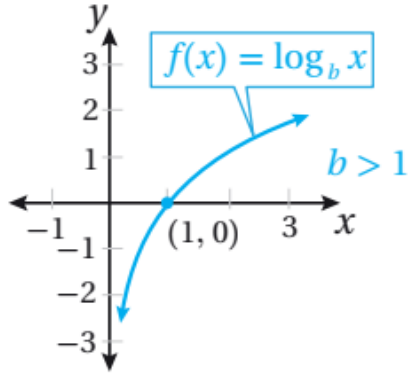
$$x = \left(\frac{1}{3}\right)^y$$

y	-2	-1	0	1	2
x	9	3	1	1/3	1/9





الوحدة (1) الاقترانات اللوغاريتمية جيل الأبطال



- المجال $R^+ : (0, \infty)$
- المدى $R : (-\infty, \infty)$
- مقطع x هو 1، ولا يوجد مقطع ل y لان $(x > 0)$ دائماً.
- الاقتران له خط تقارب رأسي هو محور $(x = 0)$ y
- الاقتران متناقص.

❖ مجال الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية

الموجبة R^+ أي الفترة $(0, \infty)$.

❖ مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R .

❖ الاقتران متزايد إذا كان $b > 1$.

❖ الاقتران متناقص إذا كان $0 < b < 1$.

❖ وجود خط تقارب رأسي للاقتران هو المحور y .

❖ الاقتران يقطع المحور x في نقطة واحدة هي $(1, 0)$

ولا يقطع المحور y .

خصائص الاقتران اللوغاريتمي



❖ يبين التمثيل البياني المجاور الاقتران اللوغاريتمي الذي

يكون في صورة: $f(x) = \log_b x$ حيث: b

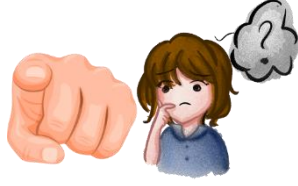
عدد حقيقي، $b > 0, b \neq 1$ وتتمثل

خصائصه في ما يأتي:





إختبر نفسك



❖ مجال الاقتران $f(x) = \log_4(16 - 8x)$ هو:

- a) $(2, \infty)$ c) $(-2, \infty)$
b) $(-\infty, 2)$ d) $(-\infty, -2)$

❖ اي الاقترانات الاتية هو متزايد:

- a) $f(x) = -\log_{\frac{1}{3}} x$
b) $f(x) = -\log_3 x$
c) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$
d) $f(x) = -\log_{\frac{5}{2}} x$

❖ الاقتران $f(x) = \log_b x$ يقطع المحور x في

النقطة:

- a) $(1, 0)$ c) $(0, 1)$
b) $(-1, 0)$ d) $(0, -1)$

❖ الاقترانات اللوغاريتمية $f(x) = \log_b x$ حيث:

b عدد حقيقي، $b \neq 1, b > 0$ تمر جميع

منحنياتها بالنقطة $(1, 0)$.

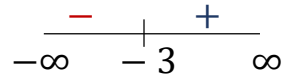
❖ مجال الاقتران اللوغاريتمي في صورة $\log_b(g(x))$

❖ مجاله هو الاعداد الموجبة فقط.

❖ جد مجال كل اقتران لوغاريتمي مما يلي:

1) $f(x) = \log_4(x + 3)$

$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$

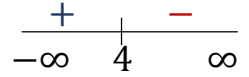


• مجال $f(x)$ هو $(-3, \infty)$

• وله خط تقارب رأسي هو $x = -3$

2) $f(x) = \log_5(8 - 2x)$

$8 - 2x = 0 \rightarrow 8 = 2x \rightarrow x = 4$



• مجال $f(x)$ هو $(-\infty, 4)$

• وله خط تقارب رأسي هو $x = 4$

إختبر نفسك



3) $f(x) = \log_7(5 - x)$

4) $f(x) = \log_5(9 + 3x)$





❖ أكتب كل معادلة أسية في صورة لوغاريتمية:

7) $2^6 = 64$

الحل:

$$\log_2 64 = 6$$

8) $4^{-3} = \frac{1}{64}$

الحل:

$$\Rightarrow \log_4 \frac{1}{64} = -3$$

9) $6^3 = 216$

الحل:

$$\Rightarrow \log_6 216 = 3$$

10) $5^{-3} = 0.008$

الحل:

$$\log_5 0.008 = -3$$

11) $(51)^1 = 51$

الحل:

$$\log_{51} 51 = 1$$

12) $9^0 = 1$

الحل:

$$\Rightarrow \log_9 1 = 0$$

أتدرب وأحل المسائل



❖ أكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي في صورة أسية:

1) $\log_7 343 = 3$

الحل:

$$\Rightarrow 7^3 = 343$$

2) $\log_4 256 = 4$

الحل:

$$\Rightarrow 4^4 = 256$$

3) $\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$

الحل:

$$\Rightarrow 125^{1/3} = 5$$

4) $\log_{36} 6 = 0.5$

الحل:

$$\Rightarrow 36^{0.5} = 6$$

5) $\log_9 1 = 0$

الحل:

$$\Rightarrow 9^0 = 1$$

6) $\log_{57} 57 = 1$

الحل:

$$\Rightarrow 57^1 = 57$$





$$\Rightarrow \log_{10} 10^{-3} = -3$$

$$18) \log_{\frac{3}{2}} 1$$

الحل:

$$\Rightarrow \log_{3/2} 1 = 0$$

$$19) \log_{\frac{1}{4}} 4$$

الحل:

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} 4$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = -1$$

$$20) 10^{\log_{10} \frac{1}{8}}$$

الحل:

$$= \frac{1}{8}$$

$$21) \log_2 \frac{1}{\sqrt{(2)^7}}$$

الحل:

$$\Rightarrow \log_2 \frac{1}{(2)^{7/2}}$$

$$\Rightarrow \log_2 (2)^{-7/2} = -7/2$$

$$22) \log_a \sqrt[5]{a}$$

الحل:

$$= \frac{1}{5}$$

❖ جد قيمة كل مما يأتي من دون الآلة الحاسبة:

$$13) \log_3 81$$

الحل:

$$\Rightarrow \log_3 3^4 = 4$$

$$14) \log_{25} 5$$

الحل:

$$\Rightarrow \log_{25} \sqrt{25} =$$

$$\Rightarrow \log_{25} 25^{1/2} = \frac{1}{2}$$

$$15) \log_2 32$$

الحل:

$$\Rightarrow \log_2 2^5 = 5$$

$$16) \log_{49} 343$$

الحل:

نفرض الجواب y

$$\log_{49} 343 = y$$

$$\Rightarrow 49^y = 343$$

$$\Rightarrow (7^2)^y = 7^3 \Rightarrow (7)^{2y} = 7^3$$

$$\Rightarrow 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \log_{49} 343 = 3/2$$

$$17) \log_{10} \frac{1}{10^3}$$

الحل:

$$\Rightarrow \log_{10} \frac{1}{(10)^3}$$





الوحدة (1) الاقترانات اللوغاريتمية جيل الأبطال

• المجال لـ $f(x)$:

• المدى لـ $f(x)$:

• مقطع x هو:

• مقطع y هو:

• خط التقارب الرأسي للاقتزان هو:

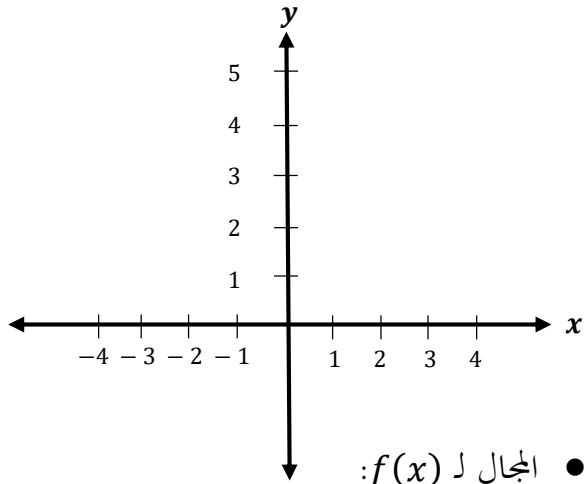
• الاقتزان:

26) $g(x) = \log_4 x$

الحل:

$x = 4^y$

y	-2	-1	0	1	2
x	1/16	1/4	1	4	16



• المجال لـ $f(x)$:

• المدى لـ $f(x)$:

• مقطع x هو:

• مقطع y هو:

• خط التقارب الرأسي للاقتزان هو:

• الاقتزان:

23) $\log_{10}(1 \times 10^{-9})$

الحل:

$= -9$

24) $8^{\log_8 5}$

الحل:

$= 5$

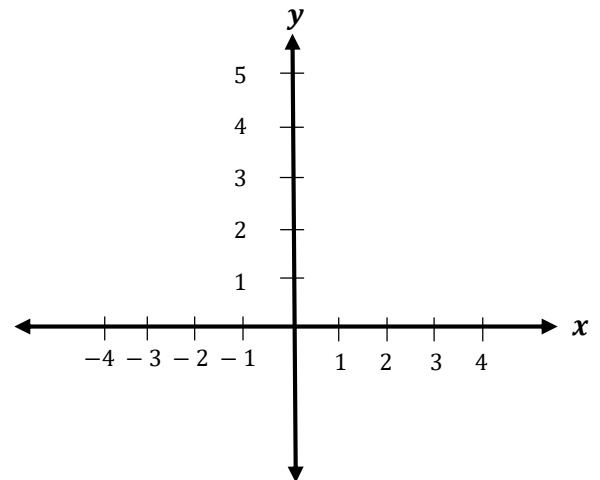
❖ أمثل كل اقتزان بيانياً ثم حدد المجال والمدى ومقطعيه من المحورين الاحداثيين وخطوط تقاربه مبيناً اذا كان متزايد ام متناقص:

25) $f(x) = \log_5 x$

الحل:

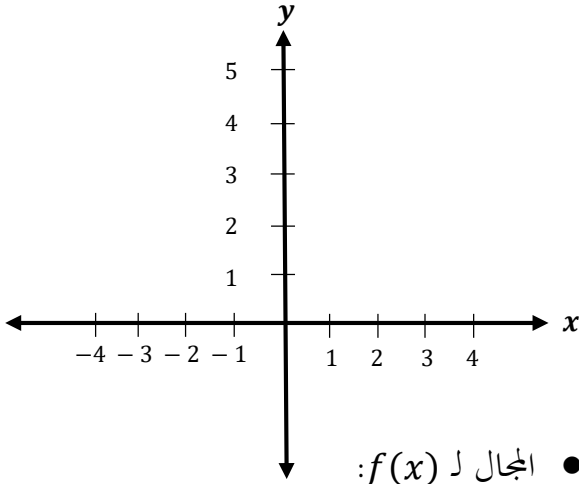
$x = 5^y$

y	-2	-1	0	1	2
x	1/25	1/5	1	5	25





الوحدة (1) الاقترانات اللوغاريتمية جيل الأبطال



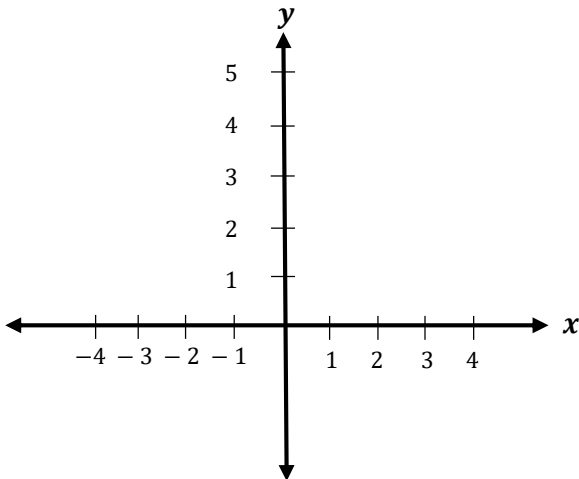
- المجال لـ $f(x)$:
- المدى لـ $f(x)$:
- مقطع x هو:
- مقطع y هو:
- خط التقارب الرأسي للاقتران هو:
- الاقتران:

29) $f(x) = \log_{10} x$

الحل:

$x = (10)^y$

y	-2	-1	0	1	2
x	1/100	1/10	1	10	100

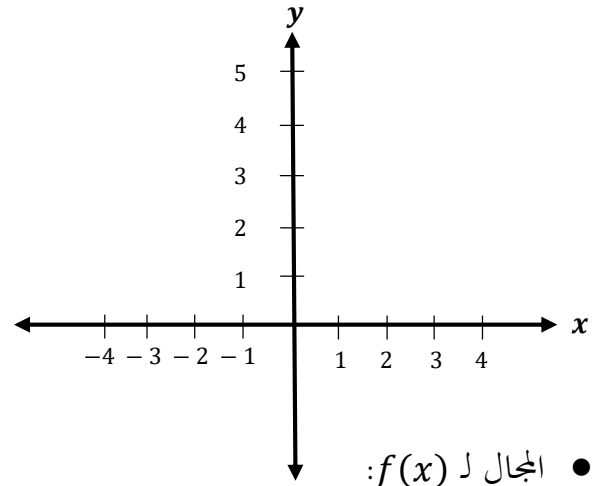


27) $h(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$

الحل:

$x = \left(\frac{1}{5}\right)^y$

y	-2	-1	0	1	2
x	25	5	1	1/5	1/25



- المجال لـ $f(x)$:
- المدى لـ $f(x)$:
- مقطع x هو:
- مقطع y هو:
- خط التقارب الرأسي للاقتران هو:
- الاقتران:

28) $r(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$

الحل:

$x = \left(\frac{1}{8}\right)^y$

y	-2	-1	0	1	2
x	64	8	1	1/8	1/64





(34) أجد قيمة a التي تجعل منحنى الاقتران

$$f(x) = \log_a x \text{ يمر بالنقطة } (32, 5).$$

الحل:

$$f(32) = 5$$

$$f(32) = \log_a 32 = 5$$

$$\Rightarrow a^5 = 32$$

$$a^5 = 2^5$$

$$\therefore a = 2$$

(35) أجد قيمة c التي تجعل منحنى الاقتران

$$f(x) = \log_c x \text{ يمر بالنقطة } \left(\frac{1}{4}, -4\right).$$

الحل:

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = -4$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_c \frac{1}{4} = -4$$

$$c^{-4} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow c^{-4} = (4)^{-1}$$

$$\Rightarrow c^{2x-2} = (2^2)^{-1}$$

$$\Rightarrow (c^2)^{-2} = 2^{-2}$$

$$\Rightarrow c^2 = 2$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{2}.$$

(36) إعلانات: يمثل الاقتران:

$$P(x) = 10 + 20 \log_5(a + 1)$$

مبيعات شركة (بآلاف الدنانير) من منتج جديد،

حيث a المبلغ (بمئات الدنانير) الذي تنفقه

الشركة على إعلانات المنتج.

• المجال لـ $f(x)$:

• المدى لـ $f(x)$:

• مقطع x هو:

• مقطع y هو:

• خط التقارب الرأسي للاقتران هو:

• الاقتران:

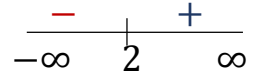
$$(30) g(x) = \log_6 x$$

واجب

$$(31) f(x) = \log_3(x - 2)$$

الحل:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

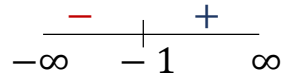


المجال هو: $(2, \infty)$

$$(32) f(x) = 5 - 2 \log_7(x + 1)$$

الحل:

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

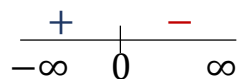


المجال هو: $(-1, \infty)$

$$(33) f(x) = -\log_4(-x)$$

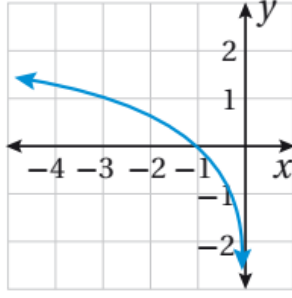
الحل:

$$-x = 0 \Rightarrow x = 0$$

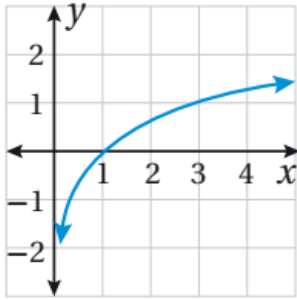


المجال هو: $(-\infty, 0)$





(b)



(c)

❖ أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي مما يأتي، محددا خط (خطوط) تقاربه الرأسية:

41) $f(x) = \log_3(x^2)$

42) $f(x) = \log_3(x^2 - x - 2)$

43) $f(x) = -\log_3\left(\frac{x+1}{x-5}\right)$

❖ اكتشف الخطأ: كتبت مني المعادلة الأسية في صورة لوغاريتميو كما يأتي:

اكتشف الخطأ الذي وقعت فيه مني، ثم صححه.

$\log_4(-3) = \frac{1}{64}$ ❌

وتعني القيمة: $P(1) \approx 19$ أن إنفاق JD100 على الإعلانات يحقق إيرادات قيمتها JD19000 من بيع المنتج:

37) أجد قيمة $P(124), P(24), P(4)$ الحل:

$$P(4) = 10 + 20\log_5(5) = 30.$$

$$P(29) = 10 + 20 \cdot \log_5 25 = 10 + 20(2) = 50$$

$$P(124) = 10 + 20\log_5 125 = 70.$$

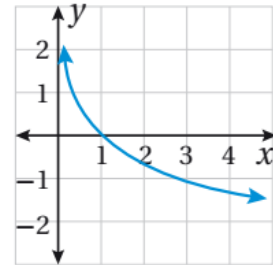
مهارات التفكير العليا

❖ أكتب بجانب كل اقتران مما يأتي رمز تمثيله البياني المناسب، مبررا إجابتي:

38) $f(x) = \log_3(x)$

39) $f(x) = \log_3(-x)$

40) $f(x) = -\log_3(x)$



(a)



إختبر نفسك



❖ تمثل المعادلة: $\log_{10} \left(\frac{1}{12} \right) = -0.0125x$

العلاقة بين شدة الضوء I بوحدة lumen والعمق x بالأمتار في إحدى البحيرات، كم تبلغ شدة الضوء عند عمق 10 m؟

❖ يستعمل الاقتران: $R = \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right)$ لحساب قوة

زلزال وفق مقياس ريختر، حيث I شدة الزلزال المراد قياسه، و I_0 أقل شدة للزلزال الذي يمكن للإنسان الإحساس به. ماذا يمثل الرمز \log في هذا الاقتران؟



2) $\log_a \frac{3}{5}$

$$\begin{aligned} \log_a \frac{3}{5} \\ \Rightarrow \log_a 3 - \log_a 5 \\ \Rightarrow 1.59 - 2.32 \approx -0.73 \end{aligned}$$

3) $\log_a 125$

$$\begin{aligned} \log_a 5^3 \\ \Rightarrow 3 \times \log_a 5 \\ \Rightarrow 3 \times (2.32) \approx 6.96 \end{aligned}$$

4) $\log_a \frac{1}{9}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \log_a 1 - \log_a 9 \\ \Rightarrow \log_a 1 - \log_a 3^2 \\ \Rightarrow 0 - 2 \times \log_a 3 \\ \Rightarrow -2 \times (1.59) = -3.18 \end{aligned}$$

❖ إذا كان $\log_b 7 \approx 1.21$ وكان $\log_b 2 \approx 0.43$

فجد:

1) $\log_b 14$

$$\begin{aligned} \log_a (7 \times 2) \\ \Rightarrow \log_b 7 + \log_b 2 \\ \Rightarrow 1.21 + 0.43 = 1.64 \end{aligned}$$

الحل:

الحل:

الحل:

الحل:

❖ تعلمت سابقًا:

- قانون القوة: $(b^x)^y = b^{xy}$
- قانون ضرب القوة: $b^x \times b^y = b^{x+y}$
- قانون قسمة القوس: $\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$

❖ إذا كانت b, x, y أعدادًا حقيقية موجبة و P كان

عددًا حقيقيًا حيث: $b \neq 0$ فإن:

- قانون الضرب:
- $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
- قانون القسمة:

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

• قانون القوة:

$$\log_b x^P = P \times \log_b x$$



أسئلة :

❖ إذا كان $\log_a 5 \approx 2.32$ وكان $\log_a 3 \approx 1.59$

فجد:

1) $\log_a 15$

$$\begin{aligned} \log_a (5 \times 3) \\ \Rightarrow \log_a 5 + \log_a 3 \\ \Rightarrow 2.32 + 1.59 \approx 3.91 \end{aligned}$$

الحل:





4) $\log_a 441$

الحل:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \log_a (21)^2 \\ &\Rightarrow 2 \cdot \log_a 21 \Rightarrow 2(\log_a 7 \times 3) \\ &\Rightarrow 2(\log_a 7) + 2(\log_a 3) \end{aligned}$$

5) $\log_a \frac{49}{27}$

الحل:

$$\begin{aligned} &\log_a 49 - \log_a 27 \\ &\log_a (7)^2 - \log_a (3)^2 \\ &\Rightarrow 2(\log_a 7) + 2(\log_a 3) \\ &\Rightarrow 2 \cdot \log_a 7 - 2 \cdot \log_a 3 \\ &\Rightarrow 2(0.936) - 2 \cdot (0.528) \\ &\Rightarrow 1.872 - 1.056 \\ &\Rightarrow 0.816 \end{aligned}$$

6) $\log_a (7 \cdot a^2)$

الحل:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \log_a 7 + \log_a a^2 \\ &\Rightarrow 0.936 + 2 = 2.936 \end{aligned}$$

7) $\log_a \sqrt[4]{81}$

الحل:

$$\Rightarrow \log_a 3 \Rightarrow 0.528$$

8) $(\log_a 3) \cdot (\log_a 7)$

الحل:

$$\Rightarrow (0.528) \cdot (0.936) = 0.494$$

9) $\log_a \frac{1}{7}$

الحل:

$$\Rightarrow \log_a 1 - \log_a 7$$

2) $\log_b \frac{2}{7}$

الحل:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \log_b 2 - \log_b 7 \\ &\Rightarrow 0.43 - 1.21 = -0.78 \end{aligned}$$

3) $\log_b \frac{1}{49}$

الحل:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \log_b 1 - \log_b 49 \\ &\Rightarrow \log_b 1 - \log_b (7)^2 \\ &\Rightarrow 0 - 2 \cdot \log_b 7 \\ &\Rightarrow -2(1.21) = -2.42 \end{aligned}$$

❖ إذا كان $\log_a 7 \approx 0.936$ وكان $\log_a 3 \approx 0.528$

فجد ما يلي:

1) $\log_a \frac{3}{7}$

الحل:

$$\begin{aligned} &= \log_a 3 - \log_a 7 \\ &= 0.528 - 0.936 = -0.408 \end{aligned}$$

2) $\log_a 21$

الحل:

$$\begin{aligned} &= \log_a 7 + \log_a 3 \\ &= 0.936 + 0.528 = 1.464 \end{aligned}$$

3) $\frac{\log_a 3}{\log_a 7}$

الحل:

$$\frac{0.528}{0.936} = 0.564$$





$$\Rightarrow 3 \cdot \log_5 x + 1 - \log_5 8$$

6) $\log_3 \frac{x^7 \cdot y^3}{z^5}$

الحل:

$$\Rightarrow \log_3 x^7 \cdot y^3 - \log_3 z^5$$

$$\Rightarrow \log_3 x^7 + \log_3 y^3 - \log_3 z^5$$

$$\Rightarrow 7 \cdot \log_3 x + 3 \cdot \log_3 y - 5 \cdot \log_3 z$$

7) $\log_a \sqrt{\frac{x^2 \cdot y^3}{a^5}}$

الحل:

$$\Rightarrow \log_a \left(\frac{x^2 \cdot y^3}{a^5} \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \log_a \frac{x^2 \cdot y^3}{a^5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (\log_a x^2 \cdot y^3 - \log_a a^5)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (\log_a x^2 + \log_a y^3 - 5)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (2 \log_a x + 3 \cdot \log_a y - 5)$$

$$\Rightarrow \log_a x + \frac{3}{2} \log_a y - \frac{5}{2}$$

8) $\log_b \sqrt[3]{\frac{x^7 \cdot b^2}{y^5}}$

الحل:

$$\Rightarrow \log_b \left(\frac{x^7 \cdot b^2}{y^5} \right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \log_b \frac{x^7 \cdot b^2}{y^5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} (\log_b x^7 \cdot b^2 - \log_b y^5)$$

$$= \frac{1}{3} (\log_b x^7 + \log_b b^2 - \log_b y^5)$$

$$0 - 0.936 = -0.936$$



كتابة اللوغاريتمات بالصورة المطولة

❖ أكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة

المطولة علماً بأن المتغيرات جميعها تمثل أعداد

حقيقية موجبة:

1) $\log_5 x^7 y^2$

صورة مختصرة

الحل:

$$\Rightarrow \log_5 x^7 + \log_5 y^2$$

$$\Rightarrow 7 \cdot \log_5 x + 2 \cdot \log_5 y$$

2) $\log_7 \frac{(5x+3)^2}{4}$

صورة مطولة

الحل:

$$\Rightarrow \log_7 (5x+3)^2 - \log_7 4$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \log_7 (5x+3) - \log_7 4$$

3) $\log_4 \frac{xy^3}{z^2}$

الحل:

$$\Rightarrow \log_4 x \cdot y^3 - \log_4 z^2$$

$$\Rightarrow \log_4 x + \log_4 y^3 - \log_4 z^2$$

$$\Rightarrow \log_4 x + 3 \cdot \log_4 y - 2 \cdot \log_4 z$$

4) $\log_2 a^2 b^9$

الحل:

$$\Rightarrow \log_2 a^2 + \log_2 b^9$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \log_2 a + 9 \cdot \log_2 b$$

5) $\log_5 \frac{(x+1)^3}{8}$

الحل:

$$\Rightarrow \log_5 (x+1)^3 - \log_5 8$$





$$4) 5\log_b x + \frac{1}{2} \cdot \log_b y - 9 \cdot \log_b z$$

الحل:

$$\begin{aligned} &= \log_b x^5 + \log_b y^{\frac{1}{2}} - \log_b z^9 \\ &= \log_b x^5 \cdot \sqrt{y} - \log_b z^9 \\ &= \log_b \frac{x^5 \cdot \sqrt{y}}{z^9} \end{aligned}$$



سؤال :

❖ في تجربة لتحديد مدى تأثير المدة الزمنية في درجة تذكر الطلبة للمعلومات، تقدمت مجموعة من الطلبة لاختبار في مادة مُعيَّنة، ثم لاختبارات مكافئة لهذا الاختبار على مدار مدد شهرية بعد ذلك، فوجد فريق البحث أنَّ النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكرها أحد الطلبة بعد t شهرًا من إنجائه دراسة المادة تعطى بالاقتران: $M(t) = 85 - 25 \cdot \log_{10}(t + 1)$. أجد النسبة المئوية للمادة التي يتذكرها هذا الطالب بعد 19 شهرًا من إنجائه دراستها، علمًا بأنَّ $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ مقربًا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

الحل:

$$\begin{aligned} M(t) &= 85 - 25 \cdot \log_{10}(t + 1) \\ M(19) &= 85 - 25 \cdot \log_{10} 20 \\ &= 85 - 25 \cdot \log(10 \times 2) \\ &= 85 - 25 \cdot (\log_{10} 10 + \log_{10} 2) \\ &= 85 - 25(1 + 0.3010) \\ &= 85 - 25(1.3010) = 52 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} (7 \cdot \log_b x + 2 - 5 \cdot \log_b y) \\ &= \frac{7}{3} \log_b x + \frac{2}{3} - \frac{5}{3} \cdot \log_b y \end{aligned}$$

كتابة اللوغاريتمات بالصورة المختصرة



❖ أكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المختصرة علمًا بأن المتغيرات جميعها تمثل أعداد حقيقية موجبة:

$$1) 3\log_2 x + 4\log_2 y$$

الحل:

$$\begin{aligned} &= \log_2 x^3 + \log_2 y^4 \\ &= \log_2 x^3 \cdot y^4 \end{aligned}$$

$$2) 5\log_a x + \frac{1}{3}\log_a y - 7\log_a z$$

الحل:

$$\begin{aligned} &= \log_a x^5 + \log_a y^{1/3} - \log_a z^7 \\ &= \log_a x^5 \cdot \sqrt[3]{y} - \log_a z^7 \\ &= \log_a \frac{x^5 \cdot \sqrt[3]{y}}{z^7} \end{aligned}$$

$$3) \log_5 a + 3 \cdot \log_5 b$$

الحل:

$$\begin{aligned} &= \log_5 a + \log_5 b^3 \\ &= \log_5 ab^3 \end{aligned}$$





أُتدرب وأحل المسائل



❖ إذا كان $\log_a 6 \approx 0.778$ وكان $\log_a 5 \approx 6.99$ فجد ما يلي:

1) $\log_a \frac{5}{6}$

الحل:

$$\begin{aligned} &= \log_a 5 - \log_a 6 \\ &= 6.99 - 0.778 = -0.079 \end{aligned}$$

2) $\log_a 30$

الحل:

$$\begin{aligned} &= \log_a (5 \times 6) \\ &= \log_a 5 + \log_a 6 \\ &= 6.99 + 0.778 = 1.477 \end{aligned}$$

3) $\frac{\log_a 5}{\log_a 6}$

الحل:

$$= \frac{6.99}{0.778} = 0.9$$

4) $\log_a \frac{1}{6}$

الحل:

$$\begin{aligned} &= \log_a 1 - \log_a 6 \\ &= 0 - 0.778 = -0.778 \end{aligned}$$

❖ يمثل الاقتران:

النسبة $M(t) = 92 - 28 \cdot \log_{10}(t + 1)$ المتوقعة للموضوعات التي يتذكرها طالب من مادة مُعَيَّنة بعد t شهرًا من إنهائه دراستها. أجد النسبة المتوقعة للموضوعات التي يتذكرها هذا الطالب بعد 29 شهرًا من إنهائه دراسة المادة، علماً بأن $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ عدد صحيح.

الحل:

$$\begin{aligned} M(t) &= 92 - 28 \cdot \log_{10}(t + 1) \\ M(29) &= 92 - 28 \cdot \log_{10} 30 \\ &= 92 - 28(\log_{10} 3 + \log_{10} 10) \\ &= 92 - 28(0.4771 + 1) \\ &= 92 - 28(1.4771) \approx 51 \end{aligned}$$





❖ أكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يلي بالصورة المطولة
علماً بأن المتغيرات جميعها تمثل أعداداً حقيقية
موجبة:

10) $\log_a x^2$

الحل:

$$= 2 \cdot \log_a x$$

11) $\log_a \left(\frac{a}{bc} \right)$

الحل:

$$\begin{aligned} &= \log_a a - \log_a bc \\ &= 1 - (\log_a b + \log_a c) \\ &= 1 - \log_a b - \log_a c \end{aligned}$$

12) $\log_a(\sqrt{x} \cdot \sqrt{y})$

الحل:

$$\begin{aligned} &= \log_a \sqrt{x} + \log_a \sqrt{y} \\ &= \log_a x^{1/2} + \log_a y^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \log_a x + \frac{1}{2} \cdot \log_a y \end{aligned}$$

13) $\log_a \left(\frac{\sqrt{z}}{y} \right)$

الحل:

$$\begin{aligned} &= \log_a \sqrt{z} - \log_a y \\ &= \log_a z^{1/2} - \log_a y \\ &= \frac{1}{2} \cdot \log_a z - \log_a y \end{aligned}$$

5) $\log_a 900$

الحل:

$$\begin{aligned} &= \log_a 30^2 \\ &= 2 \cdot \log_a 30 \\ &= 2 \cdot (\log_a 5 + \log_a 6) \\ &= 2(1.477) = 2.954 \end{aligned}$$

6) $\log_a \frac{18}{15}$

الحل:

$$\begin{aligned} &= \log_a \frac{6}{5} \\ &= \log_a 6 - \log_a 5 \\ &= 0.778 - 0.699 = 0.079 \end{aligned}$$

7) $\log_a(6a^2)$

الحل:

$$\begin{aligned} &= \log_a 6 + \log_a a^2 \\ &= 0.778 + 2 = 2.778 \end{aligned}$$

8) $\log_a \sqrt[4]{25}$

الحل:

$$\begin{aligned} &= \log_a \sqrt[4]{5^2} = \log_a 5^{2/4} \\ &= \frac{2}{4} = \log_a 5 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0.699 = 0.35 \end{aligned}$$

9) $(\log_a 5) \cdot (\log_a 6)$

الحل:

$$\begin{aligned} &= (0.699) \cdot (0.778) \\ &= 0.544 \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
&= \log_a \sqrt{\frac{x^{12}}{y^2 \cdot z^4}} \\
&= \log_a \left(\frac{x^{12}}{y^2 \cdot z^4} \right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \log_a \frac{x^{12}}{y^2 \cdot z^4} \\
&= \frac{1}{2} \cdot (\log_a x^{12} - \log_a y^2 \cdot z^4) \\
&= \frac{1}{2} (\log_a x^{12} - (\log_a y^2 + \log_a z^4)) \\
&= \frac{1}{2} (\log_a x^{12} - \log_a y^2 - \log_a z^4) \\
&= \frac{1}{2} (12 \cdot \log_a x - 2 \cdot \log_a y - 4 \cdot \log_a z) \\
&= 6 \log_a x - \log_a y - 2 \log_a z
\end{aligned}$$

❖ أكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المختصرة:

19) $\log_a x + \log_a y$

الحل:

$$\Rightarrow \log_a x \cdot y$$

20) $\log_b(x + y) - \log_b(x - y), x > y$

الحل:

$$\log_b \frac{x + y}{x - y}$$

14) $\log_a \frac{1}{x^2 \cdot y^2}$

الحل:

$$\begin{aligned}
&= \log_a 1 - \log_a x^2 \cdot y^2 \\
&= \log_a 1 - (\log_a x^2 + \log_a y^2) \\
&= 0 - \log_a x^2 - \log_a y^2 \\
&= -2 \cdot \log_a x - 2 \cdot \log_a y
\end{aligned}$$

15) $\log_a \sqrt[5]{32x^5}$

الحل:

$$\begin{aligned}
&= \log_a (\sqrt[5]{32} \times \sqrt[5]{x^5}) \\
&= \log_a 2x \\
&= \log_a 2 + \log_a x
\end{aligned}$$

16) $\log_9 \frac{(x^2 \cdot y^3)^2}{(x^2 \cdot y^3)^3}$

الحل:

$$\begin{aligned}
&= \log_a \frac{1}{x^2 \cdot y^3} \\
&= \log_a 1 - \log_a x^2 \cdot y^3 \\
&= 0 - (\log_a x^2 + \log_a y^3) \\
&= -2 \cdot \log_a x - 3 \cdot \log_a y
\end{aligned}$$

17) $\log_a(x + y - z)^7, x + y > z$

الحل:

$$7 \cdot \log_a(x + y - z)$$

18) $\log_a \sqrt{\frac{x^{12} \cdot y}{y^3 \cdot z^4}}$

الحل:





x عمره بالسنوات. أجد النسبة المئوية لطول طفل
عمره 10 سنوات من طوله عند البلوغ، علماً بأن
 $\log_6 2 \approx 0.3869$

الحل:

$$\begin{aligned} f(10) &= 29 + 48 \times 8 \log_6 12 \\ &= 29 + 48.8(\log_6 6 + \log_6 2) \\ &= 29 + 488(1 + 0.3859) \\ &= 96.68 \end{aligned}$$

(26) تحد: أثبت أن: $\frac{\log_9 216}{\log_4 36} = \frac{3}{2}$

الحل:

$$\frac{\log_a 6^3}{\log_2 6^2} = \frac{3 \cdot \log_6 6}{2 \cdot \log_6 6} = \frac{3}{2}$$

(27) اكتشف الخطأ: إكتشف الخطأ في الحل الآتي،
ثم صححه.

$$\log_2 5x = (\log_2 5)(\log_2 x)$$



الحل: الخطأ بالضرب

(28) أثبت أن:

$$\log_b(b-3) + \log_b(b^2+3b) - \log_b(b^2-9) = 1$$

حيث $b > 3$

(21) $\log_a \frac{1}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{x}$

الحل:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \log_a \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &\Rightarrow \log_a \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \log_a \frac{1}{x} \end{aligned}$$

(22) $\log_a(x^2 - 4) - \log_a(x + 2), x > 2$

الحل:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \log_a \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \log_a \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)} \\ &= \log_a x - 2 \end{aligned}$$

(23) $2\log_b x - 3\log_b y + \frac{1}{3}\log_b$

الحل:

$$\begin{aligned} &= \log_b x^2 - \log_b y^3 + \log_b z^{\frac{1}{3}} \\ &= \log_b \frac{x^2}{y^3} + \log_b \sqrt[3]{z} \\ &= \log_b \frac{x^2 \cdot \sqrt[3]{z}}{y^3} \end{aligned}$$

(24) $\log_b 1 + 2\log_b b$

الحل:

$$= 2$$

(25) يُمثل الاقتران :

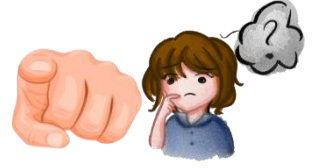
$$f(x) = 29 + 48.8 \log_6(x + 2)$$

لطول الطفل الذكر الآن من طوله عند البلوغ، حيث





إختبر نفسك



❖ يُمثل الاقتران: $L = 10 \log_{10} R$ شدة الصوت بالديسيبل، حيث R شدة الصوت النسبية بالواط لكل متر مربع. أجد شدة صوت بالديسيبل إذا كانت شدته النسبية $100 \times 10^6 \text{ W/m}^2$

أسئلة كتاب التمارين واجب جميعها





$$\begin{aligned}
 &= \frac{\log 13}{\log \frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\log 13}{\log 1 - \log 2} \\
 &= \frac{\log 13}{-\log 2} =
 \end{aligned}$$

❖ قاعدة: إذا كان $a^x = a^y$ فإن $x = y$



❖ أحل المعادلات الأسية الآتية:

1) $4^x = 256$

الحل:

$$\begin{aligned}
 4^x &= 4^4 \\
 x &= 4
 \end{aligned}$$

2) $3^{2x} = 81$

الحل:

$$\begin{aligned}
 3^{2x} &= 3^4 \\
 2x &= 4 \\
 x &= 2
 \end{aligned}$$

3) $2^x = 13$

الحل:

$$\begin{aligned}
 \log 2^x &= \log 13 \\
 x \cdot \log 2 &= \log 13 \\
 x &= \frac{\log 13}{\log 2} \\
 x &\approx 3.7
 \end{aligned}$$

❖ اللوغاريتم الطبيعي:

$$y = \ln x$$

$$e^y = x, x > 0$$



❖ جد قيمة كل مما يلي:

1) $\log_3 16$

الحل:

$$\Rightarrow \log_3 16 = \frac{\log 16}{\log 3} = 2.52$$

2) $\log_{\frac{1}{2}} 10$

الحل:

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{\log 10}{\log \frac{1}{2}} &= \frac{\log 10}{\log 1 - \log 2} \\
 &= \frac{1}{-\log 2} = -3.32
 \end{aligned}$$

3) $\log_3 51$

الحل:

$$= \frac{\log 51}{\log 3} \approx$$

4) $\log_{\frac{1}{2}} 13$

الحل:





8) $7^{2x+1} = 2^{x-4}$

الحل:

$$\begin{aligned}\log_7 7^{2x+1} &= \log_2 2^{x-4} \\ (2x+1) \cdot \log 7 &= (x-4) \cdot \log 2 \\ 2x \cdot \log 7 + \log 7 &= x \cdot \log 2 - 4 \log 2 \\ 2x \cdot \log 7 - x \log 2 &= -\log 7 - 4 \cdot \log 2 \\ x(2 \cdot \log 7 - \log 2) &= -\log 7 - 4 \cdot \log 2 \\ x &= \frac{-\log 7 - 4 \cdot \log 2}{2 \cdot \log 7 - \log 2}\end{aligned}$$

9) $9^x + 3^x - 30 = 0$

الحل:

$$\begin{aligned}(3^2)^x + 3^x - 30 &= 0 \\ (3^x)^2 + 3^x - 30 &= 0\end{aligned}$$

نفرض: $u = 3^x$

$$\begin{aligned}u^2 + u - 30 &= 0 \\ (u+6)(u-5) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u &= -6 \\ 3^x &= -6 \\ \text{لا تحل}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u &= 5 \\ 3^x &= 5 \\ \log 3^x &= \log 5 \\ x \log 3 &= \log 5 \\ x &= \frac{\log 5}{\log 3}\end{aligned}$$

10) $4^x + 2^x - 12 = 0$

الحل:

$$\begin{aligned}(2^2)^x + 2^x - 12 &= 0 \\ (2^x)^2 + 2^x - 12 &= 0\end{aligned}$$

نفرض: $f = 2^x$

$$\begin{aligned}f^2 + f - 12 &= 0 \\ (f+4)(f-3) &= 0\end{aligned}$$

4) $7^x = 9$

الحل:

$$\begin{aligned}\log 7 &= \log 9 \\ x \cdot \log 7 &= \log 9 \\ x &= \frac{\log 9}{\log 7} \\ x &\approx\end{aligned}$$

5) $5e^{3x} = 125$

الحل:

$$\begin{aligned}e^{3x} &= 25 \\ \ln e^{3x} &= \ln 25 \\ 3x &= \ln 25 \\ x &= \frac{\ln 25}{3}\end{aligned}$$

6) $2e^{5x} = 64$

الحل:

$$\begin{aligned}e^{5x} &= 32 \\ \ln e^{5x} &= \ln 32 \\ 5x &= \ln 32 \\ x &= \frac{\ln 32}{5}\end{aligned}$$

7) $2^{x+4} = 5^{3x}$

الحل:

$$\begin{aligned}\log 2^{x+4} &= \log 5^{3x} \\ (x+4) \cdot \log 2 &= 3x \cdot \log 5 \\ x \cdot \log 2 + 4 \cdot \log 2 &= 3x \cdot \log 5 \\ x \cdot \log 2 - 3x \cdot \log 5 &= -4 \cdot \log 2 \\ x(\log 2 - 3 \cdot \log 5) &= -4 \log 2 \\ x &= \frac{-4 \cdot \log 2}{\log 2 - 3 \cdot \log 5}\end{aligned}$$





$$13 = 6.5(1.014)^t$$

$$2 = (1.014)^t$$

$$\log 2 = \log(1.014)^t$$

$$\log 2 = t \log(1.014)$$

$$t = \frac{\log 2}{\log 1.014}$$

$$t \approx 50$$

إختبر نفسك



❖ اعتمادًا على المعطيات الواردة في المثال السابق بعد

كم سنةً من عام 2006 م سيبلغ عدد سكان العالم
9 مليارات نسمة؟

$$f = -4$$

$$2^x = -4$$

لا تحل

$$f = 3$$

$$2^x = 3$$

$$\log 2^x = \log 3$$

$$x \log 2 = \log 3$$

$$x = \frac{\log 3}{\log 2}$$

إختبر نفسك



❖ حل المعادلات الأسية الآتية:

$$1) 8^x = 2$$

$$2) -3e^{4x+1} = -96$$

$$3) 11^{2x+3} = 5^x$$

$$4) 49^x + 7^x - 72 = 0$$

أسئلة :

❖ نمو سكاني: قُدر عدد سكان العالم بنحو 6.5 مليار

نسمة عام 2006 م. ويُمثّل الاقتران:

$$P(t) = 6.5(1.014)^t$$

(بالمليار نسمة) بعد t عامًا منذ عام 2006 م. بعد

كم سنةً من عام 2006 م. سيبلغ عدد سكان

العالم 13 مليار نسمة؟:

الحل:

$$R(t) = 6.5(1.014)^t$$





$$x \cdot (7 \log 5 - 2 \log 3) = 2 \cdot \log 5$$

$$x = \frac{2 \log 5}{7 \log 5 - 2 \log 3}$$

16) $25^x + 5^x - 42 = 0$

الحل:

$$(5^2)^x + 5^x - 42 = 0$$

$$(5^x)^2 + 5^x - 42 = 0$$

نفرض: $s = 5^x$

$$s^2 + s - 42 = 0$$

$$(s + 7)(s - 6) = 0$$

$$s = -7$$

$$5^x = -7$$

لا تحل

$$s = 6$$

$$5^x = 6$$

$$\log 5^x = \log 6$$

$$x \log 5 = \log 6$$

$$x = \frac{\log 6}{\log 5}$$

17) $2(9)^x = 32$

الحل:

$$(9)^x = 16$$

$$\log 9^x = \log 16$$

$$x \cdot \log 9 = \log 16$$

$$x = \frac{\log 16}{\log 9}$$

18) $27^{2x+3} = 2^{x-5}$

الحل:

$$\log 27^{2x+3} = \log 2^{x-5}$$

$$(2x + 3) \cdot \log 27 = (x - 5) \cdot \log 2$$

$$2x \cdot \log 27 + 3 \cdot \log 27 = x \cdot \log 2 - 5 \log 2$$

أدرب وأحل المسائل



❖ من سؤال 1 - 12 (حل باستخدام الآلة الحاسبة):

❖ حل المعادلات الأسية الآتية مقرباً اجابتي إلى 4 منازل عشرية:

13) $6^x = 121$

الحل:

$$\log 6^x = \log 121$$

$$x \cdot \log 6 = \log 121$$

$$x = \frac{\log 121}{\log 6}$$

14) $-3e^{4x} = -27$

الحل:

$$e^{4x} = 9$$

$$\ln e^{4x} = \ln 9$$

$$4x = \ln 9$$

$$x = \frac{\ln 9}{4}$$

15) $5^{7x-2} = 3^{2x}$

الحل:

$$\log 5^{7x-2} = \log 3^{2x}$$

$$(7x - 2) \cdot \log 5 = 2x \cdot \log 3$$

$$7x \cdot \log 5 - 2 \cdot \log 5 = 2x \cdot \log 3$$

$$7x \cdot \log 5 - 2x \cdot \log 3 = 2 \cdot \log 5$$





(21) تناقصت أعداد حيوان الكوالا في إحدى

الغابات وفق الاقتران: $N = 873 e^{-0.078t}$ حيث

N العدد المتبقي من هذا الحيوان في الغابة بعد t

سنة. بعد كم سنة يصبح في الغابة 97 حيواناً من

الكوالا؟

الحل:

$$N = 873 \cdot e^{-0.078t}$$

$$97 = 873 \cdot e^{-0.078t}$$

$$0.11 = e^{-0.078t}$$

$$\ln 0.11 = \ln e^{-0.078t}$$

$$-2.2 = -0.078t$$

$$t = \frac{-2.2}{-0.078}$$

$$t = 28$$

مهارات التفكير العليا

(22) تبرير: أجد قيمة كل من h, k إذا وقعت النقطة

والنقطة $(-2, k)$ على منحنى الاقتران

$f(x) = e^{0.5x+3}$ ، مبرراً اجابتي؟

الحل:

$$(-2, k) \rightarrow f(-2) = k$$

$$f(-2) = e^{0.5(-2)+3} = k$$

$$e^2 = k$$

$$(h, 100) \rightarrow f(h) = 100$$

$$f(h) = e^{0.5h+3} = 100$$

$$0.5h + 3 = \ln 100$$

$$0.5h = \ln 100 - 3$$

$$h = \frac{\ln 100 - 3}{0.5}$$

$$2x \cdot \log 27 - x \cdot \log 2 = -3 \log 27 - 5 \cdot \log 2$$

$$x \cdot (2 \log 27 - \log 2) = -3 \log 27 - 5 \cdot \log 2$$

$$x = \frac{-3 \log 27 - 5 \cdot \log 2}{2 \log 27 - \log 2}$$

❖ أودعت سميرة مبلغ P في حساب بنكي بنسبة ربح

مركب مستمر مقدارها 5% :

(19) بعد كم سنة تصبح جملة المبلغ مثلي المبلغ

الأصلي:

الحل:

$$A = P \cdot e^{nt} \rightarrow A = 2P$$

$$2P = P \cdot e^{nt}$$

$$2 = e^{0.05t}$$

$$\ln 2 = \ln e^{0.05t}$$

$$\ln 2 = 0.05t$$

$$\frac{\ln 2}{0.05} = t$$

$$t \approx 14$$

(20) بعد كم سنة تصبح جملة المبلغ 3 أمثال المبلغ

الأصلي:

الحل:

$$A = 3P$$

$$3P = P \cdot e^{nt}$$

$$3 = e^{0.05t}$$

$$\ln 3 = \ln e^{0.05t}$$

$$\ln 3 = 0.05t$$

$$\frac{\ln 3}{0.05} = t$$

$$t \approx 22$$





(16) $64^x + 2(8^x) - 3 = 0$

(17) $7(4)^x = 49$

(18) $21^{x-1} = 3^{7x+1}$

(19) تمثل المعادلة درجة حرارة معدن (بالسليسيوس °C)

بعد t دقيقة من بدء تبريده، متى تصبح درجة حرارة المعدن 100 °C ؟

❖ توصلت دراسة إلى أن عدد الأرناب في محمية طبيعية يتزايد وفق الاقتران:

حيث $N(t) = \frac{2000}{1+3e^{-0.05t}}$ عدد الأرناب في المحمية بعد t سنة:

(20) أجد عدد الأرناب في المحمية عند بدء الدراسة.

(21) بعد كم سنة يصبح عدد الأرناب في المحمية 700 أرناب؟

❖ يمثل الاقتران: $P(t) = 200e^t$ عدد أسماك السلمون P في نهر بعد t سنة:

(22) اجد عدد أسماك السلمون في النهر عند بدء الدراسة.

(23) بعد كم سنة يصبح عدد أسماك السلمون في النهر 400 سمكة؟

(23) تحذ: أحل المعادلة $3^x + \frac{4}{3^x} = 5$

إختبر نفسك



❖ أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي، مُقَرَّبًا إيجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

1) $\log 17$

2) $\log(1.5 \times 10^{-4})$

3) $\ln 2.3$

4) $\log_2 15$

5) $\log_5 e^7$

6) $\ln 7$

❖ أجد قيمة كل مما يأتي، مُقربا إيجابتي إلى أقرب جزء من مئة (إن لزم):

7) $\log_5 27$

8) $\log_{\frac{1}{4}} 19$

9) $\log_7 8$

10) $\log_8 \frac{1}{8}$

11) $\log 10000$

12) $\log_3 18$

❖ أجد قيمة كل مما يأتي، مُقربا إيجابتي إلى أقرب جزء من مئة (إن لزم):

13) $5^x = 120$

14) $-4e^{4x} = -64$

15) $3^{2x+1} = 7^{5x}$



احجز بطاقتك من منصة أساس



جيل الأبطال
توجيهي 2006

3 دنائير

0790 943 489



@أ. فهد السلامة